Լուծումներ

11-12-րդ դասարաններ

Երկրորդ օր (16 փետրվարի, 2025թ)

Խնդիր 4 Գտնել բոլոր (a, b, c) բնական թվերի եռյակները, որոնց համար

$$(a+b)(b+c)(a+c)(a+b+c+116)$$

թիվը ինչ որ պարզ թվի աստիճան է:

Լուծում a, b, c թվերի մեջ կան երկուսը, որոնք ունեն նույն զույգությունը: Այստեղից ստանում ենք $(a+b)(b+c)(a+c)$ բաժանվում է երկուսի: Հետևաբար $(a+b)(b+c)(a+c)(a+b+c+116)$ պետք է լինի երկուսի աստիճան:

Դիցուք $(a+b)(b+c)(a+c)(a+b+c+116) = 2^n$, որտեղ n-ը բնական թիվ է: Դիցուք a, b, c թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հավասար է 2^k, որտեղ k բնական թիվ է (նկատել, որ ուրիշ արժեք չի կարող ընդունել) և $a = 2^k a_1, b = 2^k b_1, c = 2^k c_1$, որտեղ a_1, b_1, c_1 թվերից գոնե մեկը կենտ է: Քանի որ 244-ը բաժանվում է 4-ի բայց չի բաժանվում 8-ի ուրեմն $k = 2$: Կրճատումից հետո կստանանք

$$(a_1+b_1)(b_1+c_1)(a_1+c_1)(a_1+b_1+c_1+29) = 2^{n-8}$$

Ենթադրենք a_1, b_1, c_1 թվերից գոնե մեկը մեծ է մեկից և առանց ընդհանրությունը խախտելու համարենք $c_1 > 1$: Քանի որ $a_1 + c_1 > 2 \Rightarrow a_1 + c_1 \vdots 4$, որը նշանակում է a_1, c_1 թվերից մեկը 4-ի բաժանելիս տալիս է մեկ մնացորդ իսկ մյուսը 3 մնացորդ: Հետևաբար b_2-ը 4-ի բաժանելիս կտա նույն մնացորդը ինչ a_1, c_1 թվերից մեկը: Մյուս կողմից b_1-ի և այդ թվի գումարը պետք է լինի երկուսի աստիճան, բայց այդ գումարը 4-բաժանելիս տալիս է երկու մնացորդ: Հետևաբար այդ գումարը պետք է լինի 2: Որտեղից, միակ հնարավոր տարբերակը $a_1 = b_1 = 1$ և 4-ի բաժանելիս երեք մնացորդ տվող թիվը կլինի c_1-ը: Սակայն, այդ դեպքում $a_1 + b_1 + c_1 + 29 = c_1 + 31$ թիվը 4-ի բաժանելիս կտա երկու մնացորդ, որը հակասություն է: Հետևաբար այդ բոլոր թվերը միայն կարող են լինել 1:

Տեսնում ենք որ $a_1 = b_1 = c_1 = 1$-ի դեպքում պայմանը տեղի ունի, ուստի $(4, 4, 4)$ եռյակը բավարարում է խնդրի պայմաններին:

Խնդիր 5 Դիցուք ABC եռանկյան AB և AC կողմերի վրա վրցրել են համապատասխանաբար M և N կետերը այնպես, որ M և N կենտրոններով և համապատասխանաբար MB և NC շառավիղներով շրջանագծերը հատում են ABC եռանկյան արտագծած շրջանագիծը և BC հատվածը իրարից տարբեր B_1, C_1 և B_2, C_2 կետերում: Հայտնի է, որ B_1, B_2, C_1, C_2 կետերով անցնում է շրջանագիծ: Ապացուցել, որ $AB = AC$:

Լուծում Դիցուք A գագաթից տարված բարձրությունը կրկին հատում է եռանկյան արտագծած շրջանագիծը D կետում:

$$\angle BB_1B_2 = \frac{1}{2}\angle BMB_1 = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle ABC) = 90^\circ - \angle ABC = \angle BAD$$

հետևաբար B_1B_2 ուղիղը կրկին հատում է եռանկյան արտագծած շրջանագիծը D-ում: Նույն ձևով՝ C_1C_2-ը նույնպես անցնում է D-ով: Տրված պայմանից հետևում է, որ

$$\angle BCD + \angle B_1C_1B = \angle B_1C_1C_2 = \angle C_2B_2D = \angle CBD + \angle BDB_1 = \angle CBD + \angle B_1C_1B$$

ուրեմն $\angle BCD = \angle CBD$, հետևաբար AD-ն նաև A անկյան կիսորդն է, ուստի ABC եռանկյունը հավասարասրուն է, հետևաբար $AB = AC$:

Խնդիր 6 Դիցուք $0 < x_1 < \cdots < x_{2024} = 1$ իրական թվեր են: Հետևյալ գործողությունը կանվանենք այս թվերի ներկում. ընտրենք 1012 հատը նրանցից և ներկենք կարմիր և նշանակենք $r_1 < r_2 < \cdots < r_{1012}$ և մնացած 1012 թվերը $b_1 < b_2 < \cdots < b_{1012}$ ներկենք կապույտ:

Օրինակ՝ $r_i = x_i$ և $b_i = x_{i+1012}, \forall i \in [1, 1012]$ կլնի ներկում: Ներկում կլինի նաև $r_i = x_{2i-1}, b_i = x_{2i}, \forall i \in [1, 1012]$:

Յուրաքնչյուր ներկման համար դիտարկենք հետևյալ մեծությունը

$$S = r_1 b_1 + r_2(b_2 - b_1) + r_3(b_3 - b_2) + \cdots + r_{1012}(b_{1012} - b_{1011})$$

1. Հնարավո՞ր է արդյոք ընտրել $x_1, x_2, \ldots, x_{2024}$ թվերը, այնպես որ ցանկացած ներկամ համար $S < \frac{1}{2}$
2. Ապացուցել, որ ցանկացած $x_1, x_2, \ldots, x_{2024}$ թվերի համար հնարավոր է ներկել, այնպես որ $S > \frac{x_{2023}}{2}$

Լուծում

1. Վերցնենք $x_{2023} = \frac{1}{2}$ մնացած անդամները կամայական, այնպես որ բավարարեն խնդրի պայմաններին: Ցանկացած ներկամ համար

$$\begin{aligned} S &= r_1 b_1 + r_2(b_2 - b_1) + \cdots + r_{1012}(b_{1012} - b_{1011}) \\ &< r_{2012} b_1 + r_{2012}(b_2 - b_1) + \cdots + r_{1012}(b_{1012} - b_{1011}) \\ &= r_{1012} b_{1012} \leq x_{2023} \cdot x_{2024} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. Ներկենք հետևյալ կերպ. $b_i = x_i, \forall i \in [1, 1011], b_{1012} = x_{2024} = 1, r_i = x_{1011+i}, \forall i \in [1, 1012]$: Ունենք

$$S > r_{1012}(b_{1012} - b_{1011}) = x_{2023}(1 - x_{1011}) > x_{2023}(1 - x_{1012})$$

Մյուս կողմից

$$S > r_1 b_1 + r_1(b_2 - b_1) + \cdots + r_1(b_{1012} - b_{1011}) = r_1 b_{1012} = x_{1012} x_{2024} = x_{1012}$$

Վերևի երկու անհավասարություններից ստացվում է, որ x_{1012}-ի ցանկացա արժեքի դեպքում $S > \frac{x_{2023}}{2}$: