

## Լուծումներ

### 10-րդ դասարան

Երկրորդ օր (15 փետրվարի, 2026թ)

**Խնդիր 4** Դիցուք  $k > 0$  ամբողջ թիվ է: Տրված են մեկից մեծ  $n_1, n_2, \dots, n_k$  իրարից տարբեր  $k$  հատ ամբողջ թվերը այնպես, որ

$$n_1! + n_2! + \dots + n_k! = a^{n_1}$$

որտեղ  $a$ -ն ինչ-որ ամբողջ թիվ է: Ապացուցել, որ  $n_1, n_2, \dots, n_k$  թվերից գոնե մեկը պարզ է:

**Լուծում.** Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ ,  $n_1! + n_2! + \dots + n_k! = a^{n_1}$ , որտեղ  $t$ -ն ինչ որ թիվ է  $1 \leq t \leq k$  և պետք է ցույց տալ, որ  $n_1, n_2, \dots, n_k$  թվերից գոնե մեկը պարզ է: Ենթադրենք հակառակը և  $n_1, n_2, \dots, n_k$  թվերից ոչ մեկ պարզ չէ:

Ունենք

$$n_1! \left( 1 + \frac{n_2!}{n_1!} + \dots + \frac{n_k!}{n_1!} \right) = a^{n_1}$$

Ցույց տանք, որ գոյություն ունի  $p$  պարզ թիվ այնպես, որ  $n_1! : p$  և  $1 + \frac{n_2!}{n_1!} + \dots + \frac{n_k!}{n_1!}$  թիվը չի բաժանվում  $p$ -ի: Եթե  $k = 1$ , ապա  $p = 2$  բավարարում է: Մնաց  $k > 1$  դեպքը: Եթե  $n_1 + 1$  թիվը պարզ չէ, ապա  $p$ -ն վերցնենք  $n_1 + 1$  ցանկացած պարզ բաժանարար, որը կբավարարի: Հակառակ դեպքում  $n_2 > n_1 + 1$ ,  $n_1 + 2$ -ը պարզ չէ և կստանանք  $\frac{n_2!}{n_1!} + \dots + \frac{n_k!}{n_1!} : n_1 + 2$ : Այս դեպքում  $p$ -ն վերցնենք  $n_1 + 2$ -ի ինչ-որ պարզ բաժանարար:

Դիցուք  $x$ -ը այնպիսի թիվ է, որ  $p^x > n_1$ : Հետևաբար  $n_1! \left( 1 + \frac{n_2!}{n_1!} + \dots + \frac{n_k!}{n_1!} \right)$  թվի մեջ  $p$ -ի աստիճանը կլինի նույնը ինչ  $n_1!$  մեջ, որը հավասար է

$$\left[ \frac{n_1}{p} \right] + \left[ \frac{n_1}{p^2} \right] + \dots + \left[ \frac{n_1}{p^x} \right] \leq \frac{n_1}{2} + \frac{n_1}{2^2} + \dots + \frac{n_1}{2^x} = n_1 - \frac{n_1}{2^x} < n_1$$

Ստացանք, որ  $n_1! \left( 1 + \frac{n_2!}{n_1!} + \dots + \frac{n_k!}{n_1!} \right)$  թվի մեջ  $p$ -ի աստիճանը խիստ փոքր է  $n_1$ -ից և մեզ է զրոյից: Հետևաբար  $a$ -ն պետք է բաժանվի  $p$ , բայց այդ դեպքում  $a^{n_1}$ -ի մեջ  $p$ -ի աստիճանը կլինի առնվազն  $n_1$  ինչը հակասություն է: Ուրեմն մեր ենթադրությունը սխալ է և  $n_2 = n_1 + 1$ -ը պարզ թիվ է:

**Խնդիր 5** Երկրում կա 2026 քաղաք, որտեղ որոշ քաղաքների միջև ճանապարհ կա, իսկ որոշների միջև՝ չկա: Հայտնի է, որ ճանապարհները կառուցել են երկու իրարից տարբեր ընկերություններ այնպես, որ յուրքանջուր ճանապարհ կառուցվել է ճիշտ մեկ ընկերության կողմից: Ճանապարհորդություն կանվանենք սկսելով ինչ-որ քաղաքից այցելելով այլ քաղաքներ և վերադառնալ սկզբնական քաղաքը (յուրաքանչյուր քաղաք այցելելով ամենաշատը մեկ անգամ): Հայտնի է, որ ցանկացած ճանապարհորդության համար ճիշտ է հետևյալը. եթե վերցնենք երեք հաջորդական քաղաքներ այդ ճանապարհորդության ընթացքում Ա, Բ և Գ, ապա Ա-ից Բ ճանապարհի և Բ-ից Գ ճանապարհի կառուցողները տարբեր ընկերություններ են: Ինչքա՞ն է կառուցված ճանապարհների հնարավոր առավելագույն քանակը:

**Լուծում** Ապացուցենք, որ  $n$  քաղաքների դեպքում պատասխանը  $n - 1 + \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$  է:

**Պնդում.** գրաֆում չեն կարող լինել երկու իրարից տարբեր ցիկլեր, որոնք ունեն ընդհանուր կող:

**Ապացույց.** Ենթադրենք հակառակը և դիցուք

$$(A_1, A_2), (A_2, A_3), \dots, (A_t, B_1), (B_1, B_2), \dots, (B_{m-1}, B_m), (B_m, A_1)$$

և

$$(A_1, A_2), (A_2, A_3), \dots, (A_t, C_1), (C_1, C_2), \dots, (C_{l-1}, C_l), (C_l, A_1)$$

ցիկլերը ունեն  $t \geq 1$  հաջորդական կից կողեր ( $B_1 \neq C_1, B_m \neq C_m$ , բայց մյուս տեղերում կարող են լինել ընդհանուր կողեր), որտեղ  $(\cdot, \cdot)$ -ով նշանակել ենք երկու գագաթներ, որոնք միացված են կողով: Վերցնենք երկու ցիկլեր կողերի բազմությունների սիմտրիկ տարբերությունը (բոլոր այն կողերը, որոնք կան ճիշտ մեկ ցիկլում): Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ նշված երկու ցիկլերում ընդհանուր կողեր են միայն առաջին  $t$  կողերը (հակառակ դեպքում կարող ենք դիտարկել նույնը ինչ հետևյալում, բայց մի քանի ընդհանուր հաջորդական կողերի համար): Հետևաբար հետևյալ կողերի հաջորդականությունը ցիկլ է, որը տարբերվում է նշված երկու ցիկլերից՝

$$(A_t, B_1), (B_1, B_2), \dots, (B_{m-1}, B_m), (B_m, A_1), (A_1, C_l), (C_l, C_{l-1}), \dots, (C_1, A_t)$$

Ստացանք, որ  $(A_1, A_2), (A_1, B_m)$  և  $(A_1, C_l)$  կողերից ցանկացած երկուսը վերոնշյալ երեք ցիկլերից ինչ-որ մեկի հաջորդական կողեր են: Հետևաբար երեք կողերն էլ պետք է ունենան տարբեր գույներ ինչը անհնար է, ուրեմն պնդումը ճիշտ է:

Նախ կառուցենք օրինակ  $n - 1 + \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$  համար, որը համարժեք է՝ կառուցել  $n$  գագաթանի գրաֆ  $n - 1 + \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$  կողերով այնպես, որ կողերը հնարավոր լինի ներկել երկու գույնով այնպես, որ ոչ մի ցիկլ չպարունակի նույն գույնի հաջորդական կողեր: Դիցուք  $n - 1 = 3k + r$ , որտեղ  $r \in \{0, 1, 2\}$ : Դիցուք գրաֆի գագաթներն են  $X, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, \dots, A_k, B_k, C_k, D_1, \dots, D_r$ : Այժմ  $X$  գագաթը միացնենք  $A_1, C_1, A_2, C_2, \dots, A_k, C_k, D_1, \dots, D_r$  գագաթներին և միացնենք  $(A_1, B_1), \dots, (A_k, B_k)$  և  $(C_1, B_1), \dots, (C_k, B_k)$  զույգերի գագաթները: Բոլոր կողերի քանակը կլինի  $2k + r + 2k = 4k + r = 3k + r + k = n - 1 + \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$ : Կառուցված գրաֆում կա  $k$  հատ չորս երկարությամբ ցիկլ և  $r$  հատ կող, որոնք ոչ մի ցիկլի մեջ չեն:  $r$  հատ կողերը ներկենք սև, իսկ բոլոր չորս երկարությամբ ցիկլերը սև սպիտակ  $((X, A_i)$  և  $(B_i, C_i)$  սպիտակ, իսկ  $(A_i, B_i)$  և  $(X, C_i)$  սև ցանկացած  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ : Քանի որ ցանկացած երկու ցիկլ չունեն ընդհանուր կող և զույգ երկարությամբ են, ուրեմն խնդրի պայմանները բավարարվում են:

Դիցուք  $n$  գազաթի դեպքում խնդրի պատասխանն է  $f(n)$ : Հետևաբար ունենք  $f(n) \geq n - 1 + [\frac{n-1}{3}]$ : Ապացուցենք, որ  $f(n) = n - 1 + [\frac{n-1}{3}]$  ինդուկցիայով:

$n = 1$  դեպքում միակ հնարավոր կողերի քանակը 0 է, և  $n - 1 + [\frac{n-1}{3}] = 0$ , հետևաբար բազային դեպքը ապացուցված է: Ենթադրենք բոլոր  $n < k$  համար  $f(n) = n - 1 + [\frac{n-1}{3}]$  և ցույց տանք որ  $f(k) = k - 1 + [\frac{k-1}{3}]$ :

Վերցնենք  $k$  գազաթանի գրաֆ, որը բավարարում է խնդրի պայմաններին և ունի հնարավոր առավելագույն կողերի քանակ  $f(k)$ :

Եթե գրաֆը կապակցված չէ, ապա վերցնենք երկու ոչ կապակցված կոմպոնենտ և նրանցից ցանկացած մեկական գազաթ միացնենք կողով: Այդ կողը չի կարող գտնվել ոչ մի ցիկլում, ուրեմն կարող ենք ներկել ցանկացած գույնով և խնդրի պայմանները կբավարարվեն: Հետևաբար մեր ենթադրությունը սխալ էր և գրաֆը կապակցված է:

Ենթադրենք գրաֆում կա գազաթ, որի աստիճանը առավելագույնը մեկ է: Գրաֆից հեռացնենք այդ գազաթը և նրան կից կողը եթե կա: Կունենաք

$$f(k) \leq 1 + f(k-1) = 1 + k - 2 + [\frac{k-2}{3}] \leq k - 1 + [\frac{k-2}{3}] \leq k - 1 + [\frac{k-1}{3}]$$

հետևաբար  $f(k) = k - 1 + [\frac{k-1}{3}]$ :

Մնաց այն դեպքը, երբ գրաֆում բոլոր գազաթների աստիճանը նվազագույնը 2 է: Մյուս կողմից գրաֆում չի կարող լինել կենտ երկարությամբ ցիկլ (երկու գույնով հնարավոր չի լինի այդ ցիկլի կողերը ներկել): Եթե գրաֆում ցիկլ չլինի կունենաք կողերի քանակը առավելագույնը  $k - 1 \leq k - 1 + [\frac{k-1}{3}]$ : Ուրեմն գոնե մեկ ցիկլ կա: Դիտարկենք այդ ցիկլը՝  $(V_1, V_2), \dots, (V_t, V_{t+1}), (V_{t+1}, W_1), \dots, (W_l, W_{l+1}), (W_{l+1}, V_1)$ , որտեղ ցիկլի կողերից բացի կից կողեր ունեն միայն  $V_1, \dots, V_t$  գազաթները առանց ընդհանրությունը խախտելու: Գրաֆից հեռացնենք վերոնշյալ ցիկլի կողերը և  $W_1, \dots, W_l$  գազաթները: Քանի որ ըստ պնդման ոչ մի կող չի կարող գտնվել մեկից ավել ցիկլերում, ապա ստացված գրաֆում կունենաք գոնե  $t$  կոմպոնենտ և կոմպոնենտներից յուրաքանչյուրը կունենա ամենաշատը  $k - 3 < k$  գազաթ:

Դիցուք կոմպոնենտները ունեն  $a_1, a_2, \dots, a_t$  գազաթներ: Ըստ ինդուկցիոն ենթադրության ունենք, որ բոլոր կողերի քանակը ամենաշատը կլինի

$$a_1 - 1 + [\frac{a_1 - 1}{3}] + \dots + a_t - 1 + [\frac{a_t - 1}{3}]$$

Հետևաբար սկզբնական գրաֆում բոլոր կողերի քանակը կլինի ամենաշատը

$$a_1 - 1 + [\frac{a_1 - 1}{3}] + \dots + a_t - 1 + [\frac{a_t - 1}{3}] + t + l$$

Ունենք

$$\begin{aligned} f(k) &\leq a_1 - 1 + [\frac{a_1 - 1}{3}] + \dots + a_t - 1 + [\frac{a_t - 1}{3}] + t + l = \\ &a_1 + \dots + a_t + l - t + t + [\frac{a_1 - 1}{3}] + \dots + [\frac{a_t - 1}{3}] = \\ &k + [\frac{a_1 - 1}{3}] + \dots + [\frac{a_t - 1}{3}] \leq \\ &k + [\frac{a_1 + \dots + a_t - t}{3}] \leq k + [\frac{k - t - l}{3}] \leq k + [\frac{k - 4}{3}] = k - 1 + [\frac{k - 1}{3}] \end{aligned}$$

Ուրեմն  $f(n) = n - 1 + [\frac{n-1}{3}]$  և  $f(2026) = 2700$ :

**Խնդիր 6** Տրված են  $a, b, c$  դրական իրական թվերը: Ապացուցել, որ

$$\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) \left(\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a}\right) \geq 3(a^2+b^2+c^2)$$

**Լուծում** Անհավասարության երկու կողմերից հանելով

$$\left(\sum a\right) \left(\sum \frac{a^2+b^2}{a+b}\right),$$

կստանանք տրված անհավասարությունը համարժեք է

$$\left(\sum \frac{a^2+b^2}{a+b}\right) \left(\sum \frac{a^2}{b} - \sum a\right) \geq \left(\sum a\right) \left(\frac{3\sum a^2}{\sum a} - \sum \frac{a^2+b^2}{a+b}\right) \quad (1)$$

Ունենք

$$\sum \frac{a^2}{b} - \sum a = \sum \left(\frac{a^2}{b} - 2a + b\right) = \sum \frac{(a-b)^2}{b} \quad (2)$$

Բացի այդ,

$$\begin{aligned} \frac{3\sum a^2}{\sum a} - \sum \frac{a^2+b^2}{a+b} &= \sum \left(\frac{\sum a^2}{\sum a} - \frac{b^2+c^2}{b+c}\right) \\ &= \sum \frac{ab(a-b) + ac(a-c)}{(b+c)(a+b+c)} \\ &= \sum \frac{ab(a-b)}{(b+c)(a+b+c)} + \sum \frac{ac(a-c)}{(b+c)(a+b+c)} \\ &= \sum \frac{ab(a-b)}{(b+c)(a+b+c)} + \sum \frac{ab(b-a)}{(c+a)(a+b+c)} \\ &= \sum \frac{ab(a-b)(c+a-b-c)}{(a+c)(b+c)(a+b+c)} = \sum \frac{ab(a-b)^2}{(a+c)(b+c)(a+b+c)}. \end{aligned} \quad (3)$$

(2) և (3) հավասարություններից և  $(a-b)^2$ -ի բաժանելով (երբ այն զրոյից տարբեր է, հակառակ դեպքում ուղղակի կունենանք հավասարություն այդ գումարելիների համար), հետևում է, որ (1)-ը ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ

$$(a+c)(b+c) \left(\sum \frac{a^2+b^2}{a+b}\right) \geq ab^2$$

Վերջին անհավասարությունը ճիշտ է, քանի որ ձախ կողմի արտահայտությունը մեծ է

$$(a+c)(b^2+c^2) > ab^2$$