Լուծումներ

10-րդ դասարան

Երկրորդ օր (16 փետրվարի, 2025թ)

Խնդիր 4 Ցանկացած n բնական թվի համար ապացուցել հետևյալ անահավասարությունը

$$\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{2}\} + \cdots + \{\sqrt{n^2}\} \leq \frac{n^2-1}{2}$$

Լուծում.
Պնդում 1. Ցանկացած k բնական թվի համար $\{\sqrt{k^2+k}\} < \frac{1}{2}$:

Ապացույց. $\{\sqrt{k^2+k}\} = \sqrt{k^2+k} - [\sqrt{k^2+k}] = \sqrt{k^2+k} - k = \frac{k}{\sqrt{k^2+k}+k} < \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$:

Պնդում 2. Ցանկացած k, t բնական թվերի համար, որտեղ $0 \leq t \leq k-1$ տեղի ունի հետևյալ անհվաասարությունը.

$$\{\sqrt{k^2+t}\} + \{\sqrt{k^2+2k-t}\} < 1$$

Ապացույց. Տեղ ունի հետևյալը.

$$\begin{aligned}\{\sqrt{k^2+t}\} + \{\sqrt{k^2+2k-t}\} =& \sqrt{k^2+t} + \sqrt{k^2+2k-t} - [\sqrt{k^2+t}] - [\sqrt{k^2+2k-t}] = \\ & \sqrt{k^2+t} + \sqrt{k^2+2k-t} - 2k \leq \sqrt{2(2k^2+2k)} - 2k < \\ & \sqrt{4k^2+4k+1} - 2k = 1,\end{aligned}$$

Որտեղ վերջին քայլում օգտագործեցինք $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$, որի ապացույցը. անհավասարման երկու կողմը քառակուսի բարձրացնել և կստացվի $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$:

Ապացույցը կատարենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի միջոցով: $n = 1$ դեպքում $\{\sqrt{1}\} = 0 \leq \frac{1^1-1}{2} = 0$: Ենթադրենք $n = k$ ի դեպքում անհավասարությունը ճիշտ է և ցույց տանք $n = k+1$-ի համար:

$$\begin{aligned}&[\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{2}\} + \cdots + \{\sqrt{k+1)^2}\} = \{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{2}\} + \cdots + \{\sqrt{k^2}\}] + \\ &\{\sqrt{k^2+1}\} + \{\sqrt{k^2+2}\} + \cdots + \{\sqrt{(k+1)^2}\} \leq \\ &\frac{k^2-1}{2} + \{\sqrt{(k^2}\} + \{\sqrt{k^2+1}\} + \cdots + \{\sqrt{k^+2k}\} = \frac{k^2-1}{2} + \{\sqrt{k^2}\} + \{\sqrt{k^2+2k}\} + \\ &\{\sqrt{k^2+1}\} + \{\sqrt{k^2+2k-1}\} + \cdots + \{\sqrt{k^2+k-1}\} + \{\sqrt{k^2+k+1}\} + \{\sqrt{k^2+k}\} \leq \\ &\frac{k^2-1}{2} + k + \frac{1}{2} = \frac{(k+1)^2-1}{2},\end{aligned}$$

որտեղ առաջին անհավասարման համար օգտագործեցինք ինդուկցիայի քայլը և վերջին քայլում նախապես ապացուցված պնումները:

հետևաբար խնդիրը ճիշտ է ցանկացած n բնական թվի համար:

Խնդիր 5 Գրատախտակի վրա գրված են $1, 2, \dots n$ թվերը: Կամոն ու Արեգը խաղում են հետևյալ խաղը. մասնակիցներից յուրաքանչյուրը իր հերթին կարող է կատարել հետևյալ գործողություններից ճիշտ մեկը

1. Ընտրել գրատախտակին գրված ցանկացած բնական թիվ և այն փոխարինել իրենից մեկով պակաս թվով
2. Ընտրել գրատախտակին գրված ցանկացած երկու բնական թվեր և դրանք փոխարինել մեկ թվով՝ այդ թվերի գումարով

Յուրքանչյուր խաղացողի քայլից հետո քայլն անցնում է մյուս խաղացողին և խաղաը պարտվում է այն խաղացողը ով չի կարողանում քայլ կատարել: Որոշել, թե խաղացողներից ով ունի հաղթելու մարտավարություն, եթե խաղը սկսում է Արեգը:

Լուծում Ցույց տանք, որ անկախ n-ի արժեքից՝ Արեգը միշտ ունի հաղթական մարտավարություն: $n = 1$ դեպքն ակնհայտ է, հետևաբար կարող ենք ենթադրել, որ $n > 1$: Դիցուք S_i-ն և T_i-ն ցույց են տալիս i-րդ քայլից հետո գրատախտակին գրված բնական թվերի համապատասխանաբար գումարն ու քանակը, իսկ $C_i = S_i + T_i$: Պարզ է, որ i-րդ քայլին խաղացողի կողմից երկրորդ գործողությունն ընտրելու արդյունքում կունենանք

$$S_{i+1} = S_i, \quad T_{i+1} = T_i - 1$$

Ուրեմն, այս դեպքում կստացվի՝ $C_{i+1} = C_i - 1$: Իսկ եթե i-րդ քայլին խաղացողը կատարում է առաջին գործողությունը գրատախտակին գրված 1-ից մեծ բնական թվի հետ, ապա

$$S_{i+1} = S_i - 1 \quad T_{i+1} = T_i$$

Ուրեմն նորից ստացանք, որ $C_{i+1} = C_i - 1$:
Արեգի կողմից կիրառենք հետևյալ մարտավարությունը. եթե C_0-ն զույգ է, ապա առաջին քայլով կիրառենք երկրորդ գործողությունը 1 և 2 թվերի համար, իսկ հակառակ դեպքում՝ առաջին գործողությունը 1-ի հետ: Երկու դեպքում էլ C_1-ը կլինի կենտ: Ապա անկախ Կամոյի քայլերից՝ շարունակաբար կիրառենք երկրորդ գործողությունը գրատախտակին գրված երկու փոքրագույն բնական թվերի հետ, մինչև գրատախտակին մնա միայն մեկ բնական թիվ:

Լեմմա: Հետևյալ կերպ գործելով՝ չենք թողնում, որ մինչև խաղի վերջին քայլը որևէ պահի Արեգի քայլից հետո գրատախտակին հայտնվի 1 թիվը՝ անկախ Կամոյի քայլերից:

> **Ապացույց:** Ենթադրենք հակառակը՝ ինչ-որ պահի գրատախտակին միևնույնն է հայտնվում է 1 թիվը: Դիտարկենք այդ պահերից առաջինը: Արեգի մարտավարությունից հետևում է, որ այս դեպքում մինչև իր քայլը պետք է գրված լինեին առնվազն 3 հատ 1-եր: Սակայն սա էլ իր հերթին նշանակում է, որ նրա նախորդ քայլից հետո կրկին պետք է գրատախտակին գրված լիներ 1 թիվը, հետևաբար սա առաջին որոնելի պահը չէր: Մյուս կողմից Արեգի առաջին քայլից հետո գրատախտակին չի լինելու 1 թիվը, հետևաբար նշված մարտավարությամբ շարժվելով, նա չի թողնի, որ մինչև խաղի վերջին քայլն իր հերթից հետո գրատախտակին լինի գրված 1 թիվը:

Լեմմայից հետևում է, որ C մեծությունը մինչև խաղի վերջին քայլը յուրաքանչյուր քայլի կփոքրանա ճիշտ մեկով։ Մյուս կողմից Արեգի առաջին քայլից հետո C մեծությունը կենտ է, հետևաբար Արեգի բոլոր քայլերից հետո C-ն կլինի կենտ, իսկ Կամոյի քայլերից հետո՝ զույգ։ Քանի որ խաղը վերջավոր է (C-ն չի կարող դառնալ բացասական), ուստի ինչ-որ պահի գրատախտակին գրված միակ բնական թիվը կլինի 1-ը։ Քանի որ այդ ժամանակ C մեծությունը կլինի զույգ, ապա այդ պահին կլինի Արեգի քայլը, հետևաբար նա կհաղթի։

Խնդիր 6 BC տրամագծով և M կենտրոնով ω շրջանագիծը ABC սուրանկյուն եռանկյան AB և AC կողմերը հատում է համապատասխանաբար E և F կետերում: Դիցուք X-ը ω շրջանագծի B կետը չպարունակող EF աղեղի որևէ կետ է, իսկ P-ն AM և EF ուղիղների հատման կետն է: XP ուղիղը երկրորդ անգամ ω-ն հատում է Y կետում: Ապացուցել, որ $\angle XYM = \angle XAY$:

Լուծում

Քանի որ $\angle MFC = \angle FCM = \angle AEF$, հետևաբար MF-ը AEF եռանկյան արտագծած ω_1 շրջանագիծը շոշափում է F կետում: Դիցուք AM-ը ω_1-ը հատում է K կետում: Այդ դեպքում $MF^2 = MK \cdot MA = YM^2$, հետևաբար $\angle KYM = \angle YAM$: Քանի որ $AP \cdot PK = EP \cdot PF = XP \cdot PY$, ապա A, X, K, Y կետերով անցնում է շրջանագիծ, որտեղից $\angle XAP = \angle XYK$, հետևաբար $\angle XAY = \angle YAP + \angle PAX = \angle KYM + \angle XYK = \angle XAM$: