

Լուծումներ

9-րդ դասարան

Առաջին օր (14 փետրվարի, 2026թ)

Խնդիր 1 ABC սուրանկյուն եռանկյան մեջ $AC > AB$ և BC կողմի միջնուղղահայացը հատում է AC և AB ուղիղները համապատասխանաբար D և E կետերում: DE տրամագծով շրջանագիծը հատում է AC և AB ուղիղները համապատասխանաբար K և L կետերում ($K \neq D, L \neq E$): Ապացուցել, որ K, L և M կետերը գտնվում են մեկ ուղղի վրա, որտեղ M -ը BC կողմի միջնակետն է:

Լուծում. Քանի որ E, K, L և D կետերը գտնվում են նույն շրջագծի վրա, ապա ստանում ենք

$$\angle CKL = \angle DKL = \angle DEL = \angle MEB.$$

Խնդրի պայմաններից ունենք

$$\angle CME = 90^\circ,$$

և

$$\angle CKE = \angle DKE = 90^\circ$$

Ուստի C, M, K, E կետերը նույնպես գտնվում են մեկ շրջագծի վրա: Հետևաբար

$$\angle CKM = \angle CEM$$

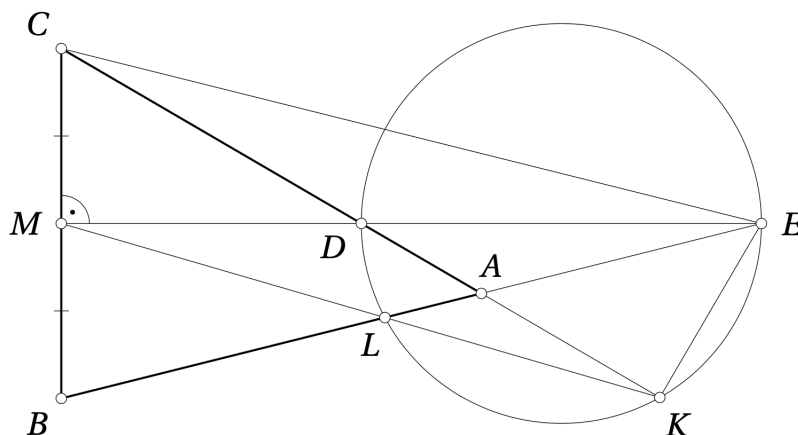
Քանի որ E կետը գտնվում է BC հատվածի միջնուղղահայացի վրա, եռանկյունները BEM և CEM -ը հավասար են, ուստի

$$\angle MEB = \angle CEM$$

Նախորդ արդյունքից ստանում ենք

$$\angle CKL = \angle CKM$$

Հետևաբար K, L և M կետերը գտնվում են մեկ ուղղի վրա:



Խնդիր 2 Դիցուք x, y, z ոչ զրոյական իրական թվերի համար $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$: Ապացուցել, որ

$$\frac{1}{x^{1013}} + \frac{1}{y^{1013}} + \frac{1}{z^{1013}} = \frac{1}{x^{1013} + y^{1013} + z^{1013}}$$

Լուծում. Խնդրի պայմանից

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$$

կստանանք

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz(x+y+z)} = 0$$

Ուստի տրված պայմանը կատարվում է այն և միայն այն դեպքում, երբ $x+y$, $y+z$ կամ $z+x$ թվերից առնվազն մեկը հավասար է զրոյի: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ $x+y=0$, ինչից հետևում է

$$y^{1013} = -x^{1013}$$

և

$$x^{1013} + y^{1013} = 0$$

Հետևաբար

$$\frac{(x^{1013} + y^{1013})(y^{1013} + z^{1013})(z^{1013} + x^{1013})}{x^{1013}y^{1013}z^{1013}(x^{1013} + y^{1013} + z^{1013})} = 0$$

ինչը համարժեք է

$$\frac{1}{x^{1013}} + \frac{1}{y^{1013}} + \frac{1}{z^{1013}} = \frac{1}{x^{1013} + y^{1013} + z^{1013}}$$

Խնդիր 3 Դիցուք $n \times n$ տախտակի վանդակներում գրված են $1, 2, \dots, n^2$ թվերը, յուրքանջյուրը ճիշտ մեկ անգամ և յուրաքանչյուր վանդակում ճիշտ մեկ թիվ: Յուրքանջյուր քայլի հնարավոր է ընտրել ցանկացած տող կամ սյուն և նրանում գտնվող թվերը ցիկլիկ տեղափոխել (առաջին վանդակում գրված թիվը գնում է երկրորդ վանդակ, երկրորդին՝ երրորդ վանդակ, և այսպես շարունակ մինչև n -րդ վանդակում գրված թիվը գնում է առաջին վանդակ): Գտնել բոլոր $n > 1$ զույգ ամբողջ թվերը, որոնց համար անկախ սկզբնական դասավորությունից հնարավոր է վերջավոր քանակությամբ քայլերից հետո ստանալ տախտակ, որտեղ ցանկացած $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ համար k -րդ տողում գրված են $(k-1)n+1, (k-1)n+2, \dots, (k-1)n+n$ թվերը ծախից աջ նշված հերթականությամբ:

Լուծում. Տես. 11 – 12-րդ դասարանների երրորդ խնդրի լուծված առաջին մասը: