Լուծումներ

9-րդ դասարան

Առաջին օր (15 փետրվարի, 2025թ)

Խնդիր 1 Բնական n թիվը կանվանենք հետաքրքիր, եթե n-ի ցանկցած $a > 1$ բաժանարարի համար $a-1$ թիվը հանդիսանում է $n-1$ թվի բաժանարար: Գտնել բոլոր հետաքրքիր բնական թվերը:

Լուծում. Դիցուք n բնական թիվը հետաքրքիր է:

Պնդում. n թիվն ունի ճիշտ մեկ պարզ բաժանարար:
Ապացույց. Ենթադրենք, n-ը ունի մեկից ավելի պարզ բաժանարար: n-ը վերլուծենք պարզ արտադրիչների՝ $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ և առանց ընդհանրությունը խախտելու համարենք, որ $p_1 < p_2 < \dots < p_k$: Դիտարկենք $a = p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ բաժանարարը: Քանի որ n-ը հետաքրքիր է, նշանակում է որ $n-1 \vdots a-1$, այսինքն, $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} - 1 \vdots p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} - 1$: Սա նշանակում է, որ

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} - p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} (p_1 - 1) \vdots p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} - 1 = a - 1$$

Պարզ է, որ $(p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, a-1) = 1$, ուստի $p_1 - 1 \vdots a-1$, ինչը հնարավոր չէ, քանի որ $p_1 - 1 < a - 1$:

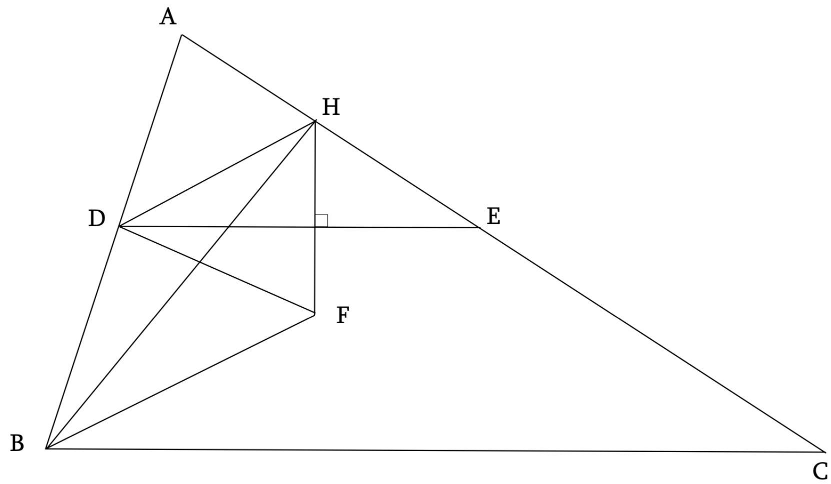
Այսպիսով, ստացանք, որ $n = p^k$: Այս դեպքում $a = p^l$, որտեղ $l \leq k$ կամայական բնական թիվ է: Հետևաբար $p^k - 1 \vdots p^{k-1} - 1 \Rightarrow p - 1 \vdots p^{k-1} - 1 \Rightarrow k \leq 2$:
Մնում է ստուգել $k = 1$ և $k = 2$ դեպքերը.

1. $k = 1$ դեպքում $n = p$ պարզ թիվ է, որն ակնհայտորեն հետաքրքիր է, քանի որ 1-ից մեծ միակ բաժանարարը հենց ինքն է:

2. $k = 2$ դեպքում $n = p^2$, իսկ $a = p$ կամ p^2, որը նույնպես բավարարում է պայմանին:

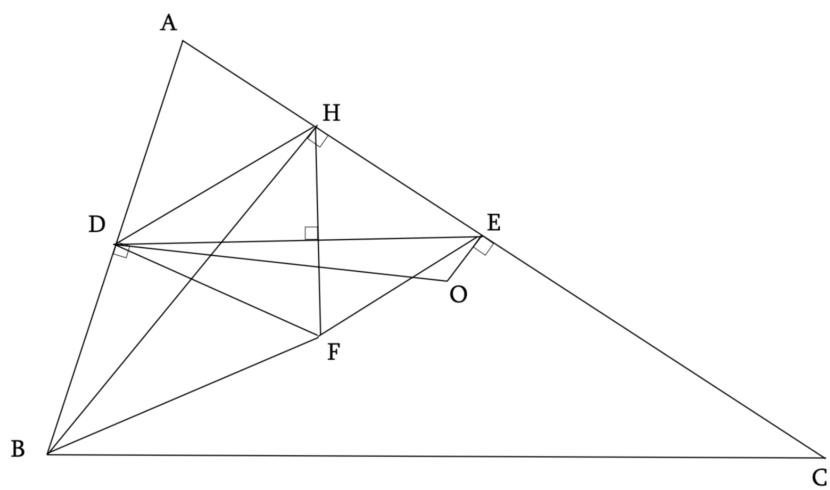
Խնդիր 2 ABC սուրանկյուն եռանկյունում BH-ը բարձրություն է, իսկ D և E կետերը համապատասխանաբար AB և AC կողմերի միջնակետերն են: Դիցուք F կետը H-ի համաչափն է DE ուղղի նկատմամբ: Ապացուցել, որ ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է BF ուղղի վրա:

Լուծում 1.



Քանի որ $AD = BD = DH = DF$, հետևաբար A, H, F, B կետերով անցնում է D կենտրոնով շրջանագիծ, որտեղից $\angle FBA = \angle FHE = 90° - \angle DEH = 90° - \angle C$: Դիցուք O-ն $\triangle ABC$ եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: $\angle AOB = 2\angle C$, որտեղից $\angle OBA = \angle OAB = 90° - \angle C$, հետևաբար B, O, F կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա:

Լուծում 2.



Դիցուք O-ն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Քանի որ $\angle OEA = \angle ODA = 90\circ$, հետևաբար A, D, O, E կետերով անցնում է շրջանագիծ, և $AD = HD = BD$, որտեղից $\angle A = \angle DHA = 180° - \angle DHE = 180° - \angle DFE$, որտեղից A, D, F, E, O կետերով անցնում է շրջանագիծ, հետևաբար $\angle C = \angle DEA = \angle DEF = \angle DOF$: Քանի որ $\angle C = \angle DOB$ հետևաբաև $\angle DOF = \angle DOB$, ինչը նշանակում է, որ B, F, O կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա:

Խնդիր 3 Դիցուք n-ը բնական թիվ է և S-ը $\{1, 2, \ldots, n\}$ թվերի ենթաբազմությունների բազմություն է: Կասենք, որ $j \in [1, n]$ տարրը լավն է, եթե գոյություն ունեն առնվազն 2 հատ բազմություններ S-ից, որոնք պարունակում են j-ն և գոյություն ունեն առնվազն 2 հատ բազմություններ S-ից, որոնք չեն պարունակում են j-ն: Գտնել S–ի հնարավոր մեծագույն հզորությունը, այնպես որ գոյություն չունենա լավ տարր:

Լուծում. S_n-ով նշանակենք $\{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ բազմության ենթաբազմությունների այն բազմությունը, որը բավարարում է խնդրի պայմաններին և ունի հնարավորինս շատ տարրեր: Դիցուք X_n-ը S_n-ի տարրերի քանակն է: Դիտարկենք որևէ j թիվ: Եթե այն լավը չէ, ապա կա՛մ j-ն S_n-ի տարրերի մեջ հանդիպում է ամենաշատը 1 անգամ, կա՛մ ամենաքիչը $X_n - 1$ անգամ:
Մաթեմատիկական ինդուկցիայով ցույց տանք, որ $X_k = k + 1$:
Երբ $k = 1$, $S_1 = \{\emptyset, \{1\}\}$:
Այժմ ենթադրենք, որ $X_{n-1} = n$ և ցույց տանք, որ $X_n = X_{n-1} + 1$: Դիտարկենք S_n բազմությունը: Ենթադրենք, գոյություն ունի որևէ j թիվ, որը S_n բազմության տարրերից ոչ մեկի մեջ չկա: Այս դեպքում ակնհայտ է, որ $X_n \le X_{n-1}$: Նույն կերպ, եթե գոյություն ունի որևէ j թիվ, որը կա S_n բազմության բոլոր տարրերի մեջ, ապա j-ն ջնջելով այդ տարրերի միջից կգանք նախորդ դեպքին: Այսպիսով, եթե $X_n > X_{n-1}$, ապա բոլոր թվերը հանդիպում են կա՛մ ճիշտ 1 անգամ, կա՛մ $X_n - 1$ անգամ:
Ենթադրենք, գոյություն ունի որևէ j թիվ, որը հանդիպում է S_n-ի բոլոր տարրերի մեջ, բացի մեկից՝ $S_n = \{A_1,\, A_2,\, \ldots A_{X_n}\}$ և $j \in A_1,\, A_2, \ldots A_{X_n - 1}$ և $j \notin A_{X_n}$: Այժմ մտովի j թիվը ջնջենք $A_1, \ldots A_{X_n-1}$ բազմությունների միջից: Ստացված բազմությունները (A_{X_n}-ը չհաշված) կազմված կլինեն $n - 1$ հատ թվերից, որոնց դեպքում լավ թվեր չեն լինի: Հետևաբար այս բազմությունների քանակը ամենաշատը X_{n-1} է, ուստի $X_n = X_{n-1} + 1$:
Ենթադրենք՝ բոլոր թվերը հանդիպում են ճիշտ 1 անգամ: Պարզ է, որ այս դեպքում $S = \{\emptyset,\, \{1\},\, \ldots \{n\}\}$-ը հնարավորինս մեծ հզորությամբ բազմությունն է, որի դեպքում լավ տարրեր չկան: Այս դեպքում կստանանք, որ $X_n = n + 1$:
Միավորելով այս դեպքերը ստանում ենք, որ $X_n = n + 1$: