

Լուծումներ

8-րդ դասարան

Առաջին օր (14 փետրվարի, 2026թ)

Խնդիր 1 Հայտնի է, որ $a, b, c, \frac{a+b}{c}, \frac{a+c}{b}, \frac{b+c}{a}$ թվերը դրական են և ամբողջ: Գտնել

$$\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a}$$

արտահայտության բոլոր հնարավոր արժեքները:

Լուծում. Նկատենք, որ

$$\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} = \frac{a+b+c}{c} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{a} - 3$$

Նշանակենք $x = \frac{a+b+c}{a}, y = \frac{a+b+c}{b}, z = \frac{a+b+c}{c} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, որտեղ x, y, z դրական ամբողջ թվերն են և անհրաժեշտ է գտնել $x + y + z - 3$:

Առանց ընդհանրությունը խախտելու համարենք, որ $x \leq y \leq z$:

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը՝

1. $x = 1$:

Կստանանք $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, որը անհնար է:

2. $x = 2$:

Կստանանք $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$: $x \leq y \leq z$ պայմանից հետևում է, որ y -ը կարող է ընդունել միայն 3, 4 արժեքները: Ստուգելով տեսնում ենք $y = 3, z = 6$ և $y = 4, z = 4$ արժեքները բավարարում են և $x + y + z - 3$ ընդունում է 8 և 7 արժեքները: Նկատենք, որ (a, b, c) -ի համապատասխան բավարարող լուծումներ կլինեն $(3, 2, 1)$ և $(2, 1, 1)$:

3. $x \geq 3$:

Կստանանք միակ հնարավոր տարբերակը $x = 3$ է և հետևաբար $y = z = 3$, որտեղից $x + y + z - 3 = 6$ բավարարում է խնդրի պայմաններին և (a, b, c) -ի համապատասխան բավարարող լուծում կլինի $(1, 1, 1)$

Ուրեմն $\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a}$ արտահայտության բոլոր հնարավոր արժեքներն են՝ 6, 7, 8:

Խնդիր 2 AEB եռանկյան EB կողմի վրա վրցված է C կետն այնպես, որ $AB = CE = 8$ սմ: AC ճառագայթի վրա վերցված է D կետն այնպես, որ $AE = CD$: Հայտնի է, որ CDE եռանկյան պարագիծը հավասար է 35 սմ և $\angle BAC = \angle AEC$: Գտնել $ABCDE$ հնգանկյան պարագիծը:

Լուծում. Օգտվելով խնդրի պայմաններից՝ ստանում ենք

$$\angle BAE = \angle BAC + \angle CAE = \angle AEC + \angle CAE$$

Եռանկյուն ACE -ից ստանում ենք

$$\angle AEC + \angle CAE = \angle DCE$$

Ուստի

$$\angle BAE = \angle DCE$$

Միևնույն ժամանակ ունենք $AE = CD$ և $AB = CE$: Հետևաբար եռանկյուններ AEB և CDE -ն հավասար են, իսկ դա նշանակում է, որ եռանկյուն AEB -ի պարագիծը հավասար է 35 սմ:

Այժմ ստանում ենք

$$\begin{aligned} EA + AB + BC + CD + DE &= (EA + AB + BE - CE) + (CD + DE + EC - CE) \\ &= (EA + AB + BE) + (CD + DE + EC) - 2CE. \end{aligned}$$

Քանի որ

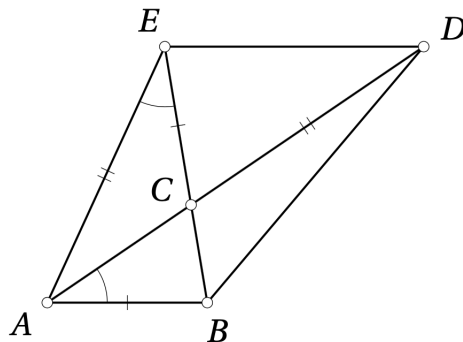
$$EA + AB + BE = CD + DE + EC = 35 \text{ սմ}$$

և

$$CE = 8 \text{ սմ},$$

ապա հնգանկյուն $ABCDE$ -ի պարագիծը հավասար է

$$2 \cdot 35 \text{ սմ} - 2 \cdot 8 \text{ սմ} = 54 \text{ սմ}.$$



Խնդիր 3 Դիցուք $n \times n$ տախտակի վանդակներում գրված են $1, 2, \dots, n^2$ թվերը, յուրքանջյուրը ճիշտ մեկ անգամ և յուրաքանչյուր վանդակում ճիշտ մեկ թիվ: Յուրքանջյուր քայլի հնարավոր է ընտրել ցանկացած տող կամ սյուն և նրանում գտնվող թվերը ցիկլիկ տեղափոխել (առաջին վանդակում գրված թիվը գնում է երկրորդ վանդակ, երկրորդինը՝ երրորդ վանդակ, և այսպես շարունակ, մինչև n -րդ վանդակում գրված թիվը գնում է առաջին վանդակ): Ապացուցել, որ $n = 2026$ դեպքում անկախ սկզբնական դասավորությունից հնարավոր է վերջավոր քանակությամբ քայլերից հետո ստանալ տախտակ, որտեղ ցանկացած $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ համար k -րդ տողում գրված են $(k - 1)n + 1, (k - 1)n + 2, \dots, (k - 1)n + n$ թվերը ձախից աջ նշված հերթականությամբ:

Լուծում. Տես. 11 – 12-րդ դասարանների երրորդ խնդրի լուծման առաջին մասը: