Լուծումներ

8-րդ դասարան

Առաջին օր (15 փետրվարի, 2025թ)

Խնդիր 1 Հայտնի է, որ n բնական թիվն ունի m հատ իրարից տարբեր բաժանարար (ներառյալ 1-ը և n-ը)։ Գտնել այդ բոլոր բաժանարարների արտադրյալի քառակուսին՝ արտահայտված m-ով և n-ով։

Լուծում. Վերցնենք n-ի որևէ d բաժանարար և դիտարկենք $\frac{n}{d}$ թիվը։ Պարզ է, որ այն նույնպես հանդիսանում է n-ի բաժանարար, քանի որ այն ամբողջ թիվ է և $n = d \cdot \frac{n}{d}$։ Այժմ n-ի բոլոր բաժանարարները գրենք մեկ տողով աճման կարգով՝ $1, ..., n$, որի ներքևի տողում գրենք նույն թվերը, սակայն արդեն նվազման կարգով՝ $n, ..., 1$։ Պարզ է, որ առաջին տողի ցանկացած d թվի ներքևում գրված է $\frac{n}{d}$ թիվը։ Բոլոր բաժանարարների արտադրյալի քառակուսին մի կողմից հավասար է այդ երկու տողերի արտադրյալին, մյուս կողմից՝ այդ m հատ սյուների արտադրյալին, ընդ որում, սյուներից յուրաքանչյուրում գրված երկու թվերի արտադրյալը n է, այսինքն բոլորի արտադրյալը n^m է։

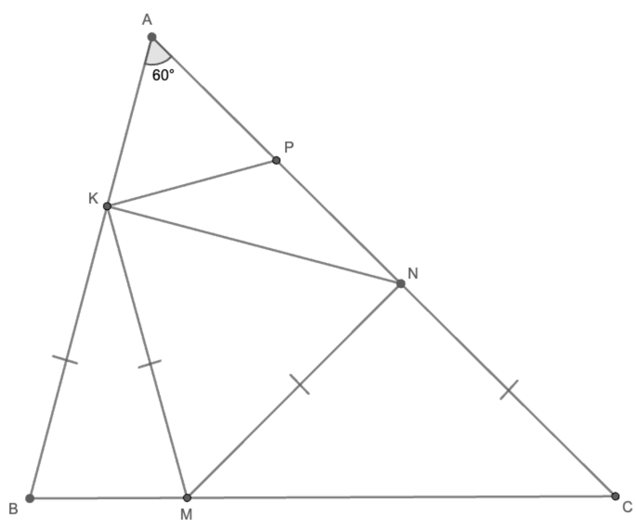
Խնդիր 2 ABC եռանկյունում $\angle BAC = 60°$: M, N և K կետերը նշված են համապատասխանաբար BC, AC և AB կողմերի վրա այնպես, որ $BK = KM = MN = NC$ և $AN = 2AK$: Գտնել ABC անկյան աստիճանային չափը:

Լուծում 1. Վերցնենք AN-ի միջնակետը՝ P-ն: $AP = \frac{AN}{2} = AK$ և $\angle KPA = 60°$, ուրեմն $\triangle AKP$-ն հավասարակողմ է: $\angle KPA = 60°$ և $PN = PK$, ուրեմն $\angle ANK = 30°$:

Նշանակենք $\angle ACB = \alpha$: Պարզ է, որ $NMC = \alpha$ և $\angle ABC = \angle KMB = 120° - \alpha$, ուստի $\angle NMK = 60°$, և քանի որ $NM = MK$, ուրեմն $\triangle MNK$-ն հավասարակողմ է, որտեղից $\angle MNK = 60°$: Օգտագործելով որ $\angle PNK = 30°$, ստանում ենք, որ $\angle MNP = 90°$, մյուս կողմից $\angle MNP = 2\alpha$ որպես արտաքին անկյուն, ուստի $\alpha = 45°$: Այսպիսով, $\angle ABC = 120° - 45° = 75°$:

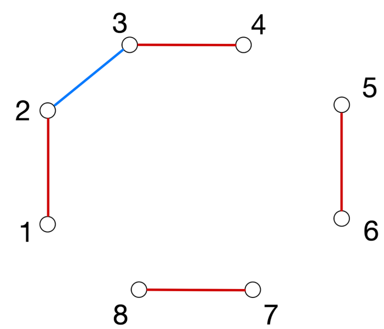
Լուծում 2. AB-ի վրա վերցնենք այնպիսի T կետ, որ $AK = KT$: Այդ դեպքում ANT եռանկյունը հավասարակողմ է, ուստի $\angle ANK = 30°$: Շարունակությունը առաջին լուծման եղանակով:

Լուծում 3. N կետից AB-ին տարված ուղղահայացի հիմքը նշանակենք K': $AK'N$ եռանկյունը $60°$ անկյամբ ուղղանկյուն եռանկյուն է, ուսստի $AK' = \frac{AN}{2}$, ուրեմն K' և K կետերը համընկնում են: Այստեղից ստացվում է, որ $\angle ANK = 30°$: Շարունակությունը առաջին լուծման եղանակով:



Խնդիր 3 8 շախմատիստների միջև անցկացվում է մրցույթ հետևյալ կերպ. մրցույթը տևում է 7 օր, յուրաքանչյուր օր տեղի է ունենում 4 խաղ՝ ամեն մասնակից ամեն օր խաղում է մեկ խաղ, և մրցաշարի վերջում ցանկացած երկու մասնակից խաղացած են լինում իրար դեմ։ Ապացուցել, որ հինգերորդ օրվա խաղերից հետո կգտնվեն այնպիսի 4 մասնակիցներ, որոնցից ցանկացած երկուսն իրար դեմ արդեն խաղացել են։

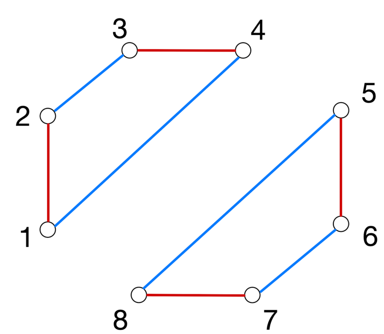
Լուծում. Մասնակիցներին համարակալենք և պատկերենք շրջանների միջոցով։ Դիտարկենք 6-րդ և 7-րդ օրը տեղի ունեցած խաղերը։ Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ 7-րդ օրը տեղի են ունեցել կարմիրով նշված խաղերը, այսինքն խաղացել են $(1,2),(3,4),(5,6)$ և $(7,8)$ զույգերը։ Կարող ենք նաև համարել, որ 6-րդ օրը տեղի ունեցած խաղերից մեկը եղել է $(2,3)$ զույգի միջև (6-րդ օրվա խաղերը կնշենք կապույտ գույնով)։



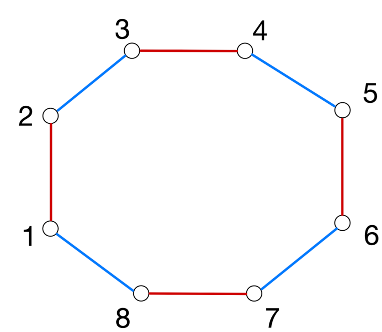
Դիտարկենք 1-ին մասնակցի 6-րդ օրվա խաղազույգին։ Նա կամ խաղացել է 4-րդ մասնակցի հետ, կամ $5,6,7,8$ մասնակիցներից որևէ մեկի, առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարող ենք համարել, որ 8-րդ մասնակցի հետ։ Դիտարկենք այդ երկու դեպքերն առանձին։

Դեպք 1. Առաջին մասնակիցը 6-րդ օրը խաղացել է 4-րդ մասնակցի հետ։ Այս դեպքում, $5,6,7,8$ քառյակում, առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ 6-րդ օրը խաղացել են $(5,8)$ և $(6,7)$ զույգերը։ Այսպիսով, $(1,3,5,7)$ քառյակում բոլորն իրար դեմ խաղացել են նախքան 6-րդ օրը (քանի որ նրանք չեն խաղացել 6-րդ կամ 7-րդ օրը, ուրեմն խաղացել են առաջին 5 օրերի ընթացքում)։

Դեպք 2. Առաջին մասնակիցը 6-րդ օրը խաղացել է 8-րդ մասնակցի հետ։ Այս դեպքում, 4-րդ մասնակիցը 6-րդ օրը չի կարող խաղացած լինել 7-րդ մասնակցի հետ, քանի որ այդ դեպքում 5-րդ և 6-րդ մասնակիցները կլինեին առանց խաղազույգի։ Ուստի, առանց ընդհանրությունը խախտելու համարենք, որ 4-րդ մասնակիցը 6-րդ օրը խաղացել է 5-րդ մասնակցի հետ, իսկ 6-րդ մասնակիցը՝ 7-րդի հետ։ Այս դեպքում նույնպես, $(1,3,5,7)$ քառյակում բոլորն իրար դեմ խաղացել են նախքան 6-րդ օրը։



Դեպք 1



Դեպք 2