

## Լուծումներ

11-12-րդ դասարաններ

Առաջին օր (14 փետրվարի, 2026թ)

**Խնդիր 1** Գտնել բոլոր  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ֆունկցիաները, որոնց համար

$$f(x + f(y)) \leq yf(x) - x$$

ցանկացած  $x, y \in \mathbb{R}$ :

**Լուծում** Տեղադրենք  $y = 0$ , որտեղից կստանանք  $f(x) \leq -x + f(0)$ : Այստեղից կհետևի

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad (1)$$

Սկզբնական անհավասարման մեջ  $x$  փոխարեն տեղադրելով  $x - f(y)$  կստանանք

$$f(x) \leq yf(x - f(y)) - x + f(y) \quad (2)$$

Վերոնշյալ հատկության մեջ ֆիքսենք  $x$  և  $y$  ձգտի  $+\infty$ : Կունենանք

$$f(x) \leq \lim_{y \rightarrow +\infty} (yf(x - f(y)) - x + f(y)) = -\infty, \quad (3)$$

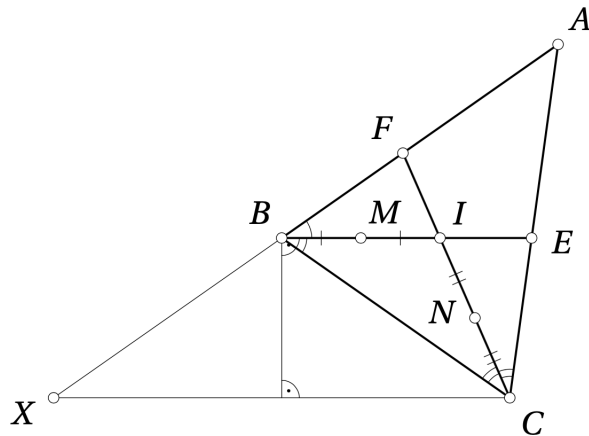
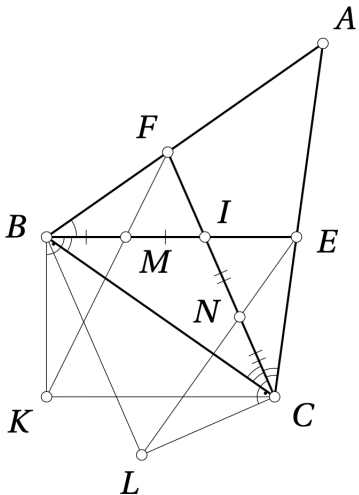
որը հակասություն է: Հետևաբար այդպիսի ֆունկցիա գոյություն չունի:

**Խնդիր 2**  $ABC$  եռանկյան  $B$  և  $C$  գագաթներից տարված ներքին անկյունների կիսորդները հատվում են  $I$  կետում և հատում են  $CA$  և  $AB$  կողմերը համապատասխանաբար  $E$  և  $F$  կետերում: Դիցուք  $M$ -ը և  $N$ -ը համապատասխանաբար  $BI$  և  $CI$  հատվածների միջնակետերն են:  $FM$  ուղիղը հատում է  $B$  գագաթի արտաքին անկյան կիսորդը  $K$  կետում, իսկ  $EN$  ուղիղը հատում է  $C$  գագաթի արտաքին անկյան կիսորդը  $L$  կետում: Ապացուցել, որ  $K, B, C, L$  կետերով անցնում է շրջանագիծ:

**Լուծում** Ունենք  $\angle KBE = 90^\circ$ , քանի որ  $BE$ -ն և  $BK$ -ն  $B$  գագաթի ներքին և արտաքին անկյունների կիսորդներն են: Այժմ ցույց տանք, որ  $\angle BKC = 90^\circ$ : Դիցուք  $X$ -ը լինի  $AB$  ուղղի վրա, այնպես որ  $CX \parallel BE$ : Կունենանք  $ABC$  եռանկյան  $B$  գագաթի արտաքին անկյան կիսորդը նույնպես ուղղահայաց է  $CX$  ուղղին: Նշանակենք  $\angle ABC = \beta$ : Ապա  $\angle BCX = \angle CBE = \frac{\beta}{2}$  և  $\angle XBC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \beta$ : Հետևաբար,  $\angle BXC = 180^\circ - (\angle BCX + \angle XBC) = \frac{\beta}{2}$ , հետևաբար  $XBC$  եռանկյունը հավասարասրուն է: Այսպիսով,  $XBC$  եռանկյան  $B$  գագաթից տարված բարձրությունը կիսում է  $CX$  հիմքը, որը  $B$  գագաթի արտաքին անկյան կիսորդն է:

Ունենք  $BI \parallel XC$  և  $BM = IM$ , ուրեմն  $FM$  ուղիղը անցնում է  $CX$  հատվածի միջնակետով: Հետևաբար,  $ABC$  եռանկյան  $B$  գագաթի արտաքին անկյան կիսորդի և  $FM$  ուղղի հատման  $K$  կետը  $CX$  հատվածի միջնակետն է, որտեղից  $\angle BKC = 90^\circ$ :

Նմանապես կստանանք, որ  $\angle BLC = 90^\circ$ : Հետևաբար  $K, B, C, L$  կետերով անցնում է շրջանագիծ:



**Խնդիր 3** Դիցուք  $n \times n$  տախտակի վանդակներում գրված են  $1, 2, \dots, n^2$  թվերը, յուրքանջուրը ճիշտ մեկ անգամ և յուրաքանչյուր վանդակում ճիշտ մեկ թիվ: Յուրքանջուր քայլի հնարավոր է ընտրել ցանկացած տող կամ սյուն և նրանում գտնվող թվերը ցիկլիկ տեղափոխել (առաջին վանդակում գրված թիվը գնում է երկրորդ վանդակ, երկրորդին՝ երրորդ վանդակ, և այսպես շարունակ մինչև  $n$ -րդ վանդակում գրված թիվը գնում է առաջին վանդակ): Գտնել բոլոր  $n > 1$  ամբողջ թվերը, որոնց համար անկախ սկզբնական դասավորությունից հնարավոր է վերջավոր քանակությամբ քայլերից հետո ստանալ տախտակ, որտեղ ցանկացած  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  համար  $k$ -րդ տողում գրված են  $(k-1)n+1, (k-1)n+2, \dots, (k-1)n+n$  թվերը ծախից աջ նշված հերթականությամբ:

**Լուծում.** Քանի որ  $n-1$  անգամ նույն գործողությունը անելուց հետո կհասնենք իրավիճակի, որը համարժեք է նշված գործողության հակադարձը անելուն, ապա առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ ցիկլիկ գործողությունը կարող ենք կատարել ցանկացած ուղղությամբ (տողերի դեպքում աջ կամ ձախ, իսկ սյուների դեպքում ներքև կամ վերև):

Սկզբում ենթադրենք, որ  $n$ -ը զույգ է: Ցույց տանք, որ հնարավոր է փոխանակել ցանկացած երկու հարևան վանդակների թվեր (երկու վանդակ հարևան են, եթե ունեն ընդհանուր կողմ):

Ենթադրենք, որ  $i$ -րդ տողի և  $j$ -րդ սյան վանդակում գրված է  $a_{i,j}$ , որտեղ  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ : Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ անհրաժեշտ է տեղափոխել  $(1, 1)$  և  $(1, 2)$  վանդակների թվերը:

Կատարենք  $2n+1$  ցիկլիկ տեղափոխում հետևյալ կերպ. յուրաքանչյուր  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  համար

- $2i+1$ -րդ քայլում առաջին սյան թվերը ցիկլիկ տեղափոխենք վերև,
- $2i$ -րդ քայլում առաջին տողի թվերը ցիկլիկ տեղափոխենք ձախ, եթե  $i$ -ն կենտ է, և տեղափոխենք աջ, եթե  $i$ -ն զույգ է:

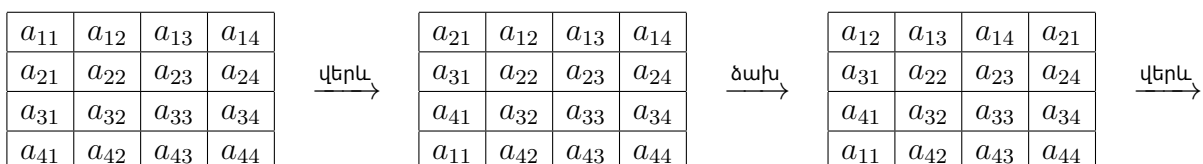
քանի որ գործողությունները կատարվում են առաջին տողում և առաջին սյունում, ուրեմն ցանկացած  $i, j \in \{2, 3, \dots, n\}$  համար  $a_{i,j}$ -երը չեն տեղափոխվում իրենց տեղերից գործողությունների ամբողջ ընթացքում:

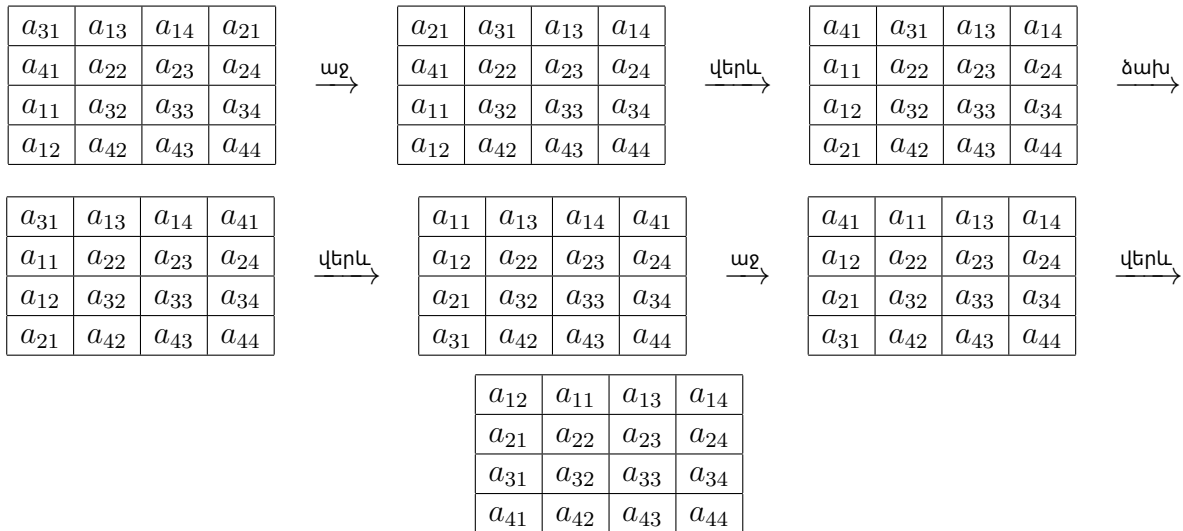
Յուրաքանչյուր  $j \in \{3, \dots, n\}$  համար  $a_{1,j}$  թիվը  $n/2$  անգամ շարժվում է մեկ վանդակ ձախ և  $n/2$  անգամ մեկ վանդակ աջ, հետևաբար մնում է իր տեղում:

Յուրաքանչյուր  $i \in \{2, \dots, n\}$  համար  $a_{i,1}$  թիվը ճիշտ  $n$  անգամ ցիկլիկ շարժվում է վերև (առաջին սյան թվերը շարժվում են վերև  $n+1$  անգամ, և  $2i-1$ -րդ պահին  $a_{i,1}$ -ը առաջին սյան մեջ չէ, քանի որ առաջին տողից տեղափոխվել է աջ): Ուստի  $a_{i,1}$ -ը նույնպես մնում է իր տեղում:

$a_{1,1}$  թիվը ցիկլիկ շարժվում է վերև  $n$  անգամ, հետևաբար  $2n-1$ -րդ քայլից հետո վերադառնում է իր տեղը, իսկ  $2n$ -րդ քայլում շարժվում է աջ և մնում այնտեղ:

Միակ հնարավորությունը  $a_{1,2}$ -ի համար այն է, որ այն հայտնվի  $a_{1,1}$ -ի տեղում: Այսպիսով  $2n+1$ -րդ քայլից հետո  $a_{1,1}$  և  $a_{1,2}$  թվերը կփոխանակվեն, իսկ մնացած բոլոր թվերը կմնան իրենց տեղերում: Հետևյալում տեսեք նկարագրված պրոցեսը  $n=4$  դեպքում.





Քանի որ կարող ենք փոխանակել ցանկացած երկու հարևան վանդակների թվեր, ապա հեշտությամբ կարող ենք ստանալ դասավորություն, որտեղ յուրաքանչյուր  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  համար  $k$ -րդ տողում թվերը լինեն

$$(k-1)n+1, (k-1)n+2, \dots, (k-1)n+n$$

(հերթականությամբ տեղափոխելով նախ 1-ը իր տեղը, ապա 2-ը և այդպես շարունակ մինչև  $n^2-1$ ):

Այժմ ապացուցենք, որ բոլոր կենտ  $n$ -երը չեն բավարարում խնդրի պայմաններին: Սահմանենք գործողություն երկու հարևան վանդակների թվերի տեղափոխումը: Օրինակ՝ խնդրում թույլատրելի ցիկլիկ տեղափոխումը հնարավոր է ստանալ  $n-1$  հատ գործողությունների արդյունքում (տեղափոխելով առաջին երկու վանդակների թվերը, հետո երկրորդ և երրորդ վանդակների թվերը և այսպես շարունակ մինչև  $(n-1)$ -րդ և  $n$ -րդ վանդակների թվերը):

Ցույց տանք, որ կամայական սկզբնական դասավորությունից խնդրում պահանջվող դասավորությունը ստանալու գործողությունների զույգությունը ինվարիանտ է (այսինքն եթե սկզբնական դասավորությունից հնարավոր է վերջնականը ստանալ կատարելով  $x$  գործողություն, ապա նշված սկզբնական դասավորությունից վերջնականը ստանալու բոլոր տարբերակների գործողությունների քանակները ունեն  $x$ -ի զույգությունը) անկախ գործողությունների ընտրությունից: Դիտարկենք ցանկացած երկու  $(i, j)$ -րդ և  $(k, l)$ -րդ վանդակների թվեր, որտեղ  $(i, j)$  վանդակը տախտակում հանդիպում է մինչև  $(k, l)$  վանդակը, շարժվելով ձախից աջ և վերևից ներքև (կամ որ նույն է՝  $(i < k)$  կամ  $(i = k$  և  $j < l)$ ): Ենթադրենք  $(i, j)$ -րդ վանդակի թիվը  $a$ -ն է իսկ  $(k, l)$ -րդ վանդակի թիվը  $b$ -ն: Կասենք  $a$  և  $b$  թվերը ինվերս են, եթե  $a > b$ :

**Պնդում.** Ցուրքանչյուր գործողության արդյունքում տախտակում ինվերսների քանակի զույգությունը փոխվում է:

**Ապացույց.** Դիցուք գործողության արդյունքում տեղափոխում ենք  $a$  և  $b$  թվերը որոնք գտնվում են հարևան վանդակներում: Եթե այդ թվերը գտնվում են նույն տողում, ապա ինվերսների քանակը փոխվում է ճիշտ մեկով (կամ մեծանում է մեկով կամ փոքրանում կախված թվերի դիրքից): Եթե այդ թվերը գտնվում են տարբեր

տողերում և հետևաբար պետք է գտնվեն հաջորդական տողերում և նույն սյունում: Առանց ընդհանրությունը խախտելու համարենք որ  $a$ -ն գտնվում է վերևի տողում իսկ  $b$ -ն ներքևի: Դիցուք վերևի տողում  $a$ -ից հետո գրված թվերն են  $x_1, \dots, x_t$  նշված հերթականությամբ իսկ ներքևի տողում մինչև  $b$  գրված թվեր են  $x_{t+1}, \dots, x_{n-1}$  նշված հերթականությամբ (ընդհանուր կլինի  $n - 1$  թիվ քանի որ  $a$  և  $b$  թվերի վանդակները նույն սյունում են): Նշանակենք  $a$ -ի հետ ինվերս կազմող թվերի քանակը  $x_1, \dots, x_{n-1}$  բազմությունից  $u$  իսկ  $b$ -ի՝  $v$ : Գործողությունից հետո քանի որ  $a$ -ն և  $b$ -ն տեղերով փոխվում են նրանց ինվերսների քանակը  $x_1, \dots, x_{n-1}$  բազմության թվերի հետ կլինեն համապատասխանաբար  $n - 1 - u$  և  $n - 1 - v$ : Ավելին, եթե  $a$  և  $b$  թվերը ինվերս էին, ապա գործողությունից հետո նրանք ինվերս չեն լինի, իսկ եթե ինվերս չէին ապա գործողությունից հետո կլինեն ինվերս: Հետևաբար տախտակում ինվերսների քանակի զույգությունը կփոխվի  $(n - 1 - u + n - 1 - v + 1) - (u + v) = 2(n - 1 - u - v) + 1$  որը կենտ թիվ է: Ուրեմն ցանկացած գործողության արդյունքում ինվերսների քանակի զույգությունը փոխվում է:

Վերցնենք կամայական սկզբնական տախտակ և նրանում ինվերսների քանակը նշանակենք  $I$ : Ըստ պնդման ունենք, որ ցանկացած մեկ գործողության արդյունքում տախտակում ինվերսների քանակի զույգությունը փոխվում է: Հետևաբար սկզբնական տախտակից վերջնականը ստանալու գործողությունների քանակի զույգությունը պետք է ունենա  $I$ -ի զույգությունը անկախ գործողությունների ընտրությունից:

Ենթադրենք տախտակում թվերը դասավորված են հետևյալ կերպ. առաջին տողի թվերն են  $\{2, 1, 3, 4, \dots, n\}$ , իսկ յուրաքանչյուր  $k \in \{2, \dots, n\}$  համար  $k$ -րդ տողի թվերը

$$(k - 1)n + 1, (k - 1)n + 2, \dots, (k - 1)n + n$$

նշված հերթականությամբ ձախից աջ: Ինվերսների քանակը տախտակում կլինի 1 (ինվերս կլինեն միայն առաջին տողի առաջին երկու թվերը), որը կենտ է: Նկատենք նաև, որ խնդրում պահանջվող տախտակի ինվերսների քանակը զրո է: Հետևաբար նշված սկզբնական տախտակից հնարավոր կլինի վերջնականը ստանալ կենտ քանակի գործողությունների միջոցով: Սակայն յուրաքանչյուր քայլում կատարած փոփոխությունները հնարավոր է ստանալ  $n - 1$  գործողությունների արդյունքում, որտեղ  $n - 1$  զույգ թիվ է: Հետևաբար հնարավոր չի լինի զույգ քանակի գործողություններին համարժեք տեղափոխություններ անելով ստանալ պահանջվող դասավորությունը: