Լուծումներ

11-12-րդ դասարաններ

Առաջին օր (15 փետրվարի, 2025թ)

Խնդիր 1 Գտնել բոլոր $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են

$$2f(x+y)\geq f(x)+f(y)+x+y,$$

պայմանին ցանկացած $x,y\in\mathbb{R}$ թվերի համար։

Լուծում Խնդրի տրված պնդումը նշանակենք $P(x,y)$: Նշանակենք $c=f(0)$ և $P(x,0)$-ից հետևում է, որ $\forall x\in\mathbb{R}$ համար

$$f(x)\geq x+c \tag{1}$$

$P(x,-x)$-ից և (1)-ից կստանանք

$$2c\geq f(x)+f(-x)\geq x+c-x+c=2c$$

որտեղից էլ հետևում է $f(x)=x+c,\forall x\in\mathbb{R}$: Տեղադրելով սկզբնական պայմանի մեջ ստանում ենք $2(x+y)+2c\geq 2(x+y)+2c$, որը ճիշտ է ցանկացած $c\in\mathbb{R}$: Այսպիսով $f(x)=x+c,\forall x\in\mathbb{R}$, որտեղ c-ն ցանկացած իրական թիվ է:

Խնդիր 2 Դիցուք n-ը բնական թիվ է և S-ը $\{1, 2, \ldots, n\}$ թվերի ենթաբազմությունների բազմություն է: Կասենք, որ $j \in [1, n]$ տարրը լավն է, եթե գոյություն ունեն առնվազն n հատ բազմություններ S-ից, որոնք պարունակում են j-ն և գոյություն ունեն առնվազն n հատ բազմություններ S-ից, որոնք չեն պարունակում են j-ն: Գտնել S–ի հնարավոր մեծագույն հզորությունը, այնպես որ գոյություն չունենա լավ տարր:

Լուծում Դիցուք $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_x\}$ հնարավոր ամենաշատ տարր ունեցող բազմությունն է, որի համար լավ տարր գոյություն չունի: Դա կնշանակի, որ ցանկացած $j \in [1, n]$ համար գոյություն ունեն ամենաշատը $n - 1$ բազմություններ S-ից, որոնք պարունակում են j-ն կամ գոնե $x - n + 1$ բազմություններ պարունակում են j-ն: Եթե գոյություն ունեն գոնե $x - n + 1$ բազմություններ, որոնք պարունակում են j-ն, ապա այդ բոլոր բազմություններից ջնջենք j-ն և այն ավելացնենք S-ի մնացած բոլոր բազմություններում (այն բոլոր բազմությունները որոնք չեն պարունակում j-ն փոքր կամ հավասար են $n - 1$-ից): Նկատենք, որ այս գործողությունից հետո ստացված բոլոր բազմությունները իրարից տարբեր են և լավ տարր նորից գոյություն չունի: Հետևաբար կարող ենք համարել, որ ցանկացած $j \in [1, n]$ տարրի համար գոյություն ունեն ամենաշատը $n - 1$ բազմություներ S-ից, որոնք պարունակում են j-ն:

Ցանկացած $j \in [1, n]$ տարրի համար a_j-ով նշանակենք թե այն քանի բազմության մեջ կա $A_1, A_2, \ldots, A_x$-ից: Հետևաբար (նկատել որ $x \geq n + 1$ եթե վերցնենք դատարկ և բոլոր մի տարրանոց բազմությունները)

$$n(n - 1) \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq |A_1| + |A_2| + \ldots |A_x| \geq n + 2(x - n - 1),$$

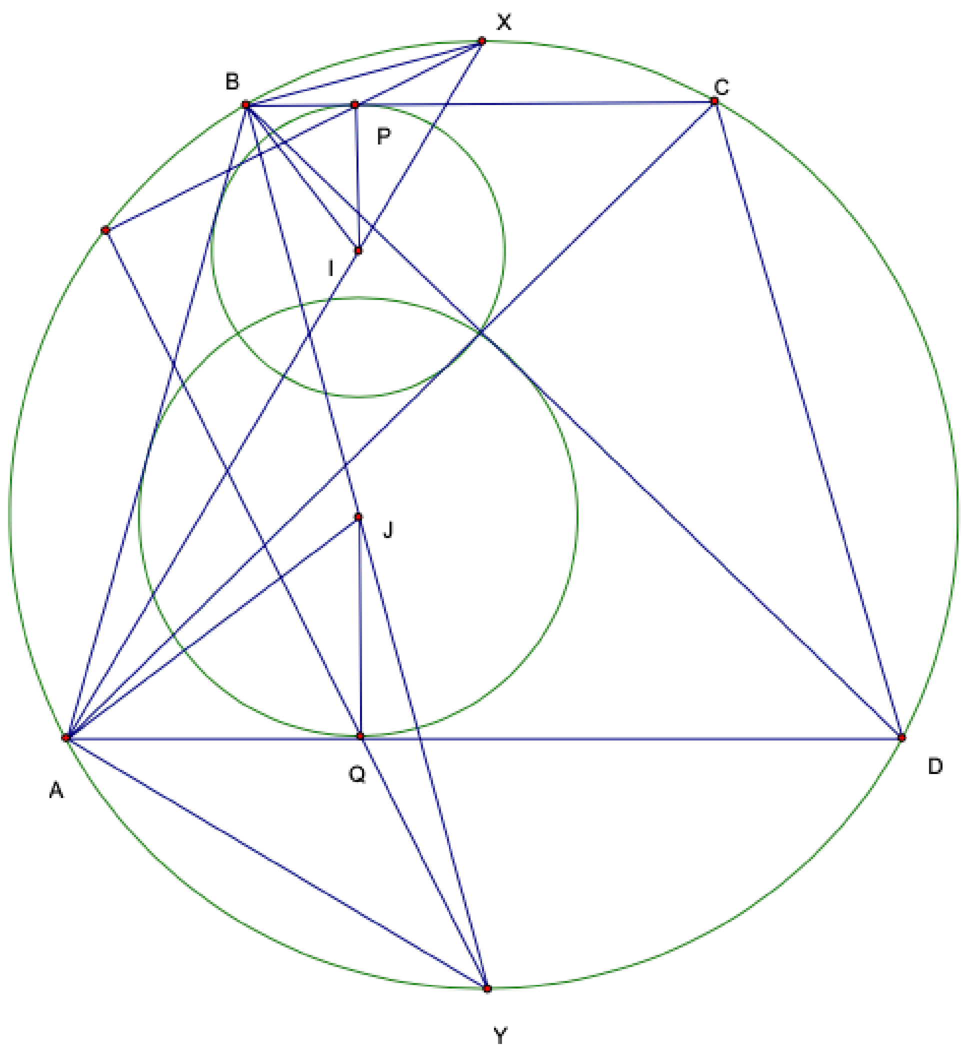
որտեղից կստացվի $x \leq [n^2/2] + 1$:

Այժմ կառուցենք օրինակ, որտեղ $x = [n^2/2] + 1$: Վերցնենք $A_1 = \emptyset$ և ցանկացած $j \in [2, n + 1]$ համար $A_j = \{j - 1\}$: Եթե n-ը լինի զույգ, ապա $A_{n+2}, A_{n+3}, \ldots, A_{n^2/2+1}$ բազմությունները կվերցնենք բոլոր երկու տարր պարունակող բազմությունները բացառությամբ $\{1, n\}, \{2, n - 1\}, \ldots, \{n/2, n/2 + 1\}$ բազմությունների: Եթե n-ի լինի կենտ, ապա $A_{n+2}, A_{n+3}, \ldots, A_{(n^2-1)/2+1}$ բազմությունները կվերցնենք բոլոր երկու տարր պարունակող բազմությունները բացառությամբ $\{1, n\}, \{2, n-1\}, \ldots, \{(n-1)/2, (n+3)/2\}$ և $\{1, (n + 1)/2\}$ բազմությունների: Նկատել, որ կառուցված օրինակը բավարարում է խնդիր պայմաններին:

Հետևաբար խնդրի պատասխանն է $[n^2/2] + 1$:

Խնդիր 3 $ABCD(AD \parallel BC)$ սեղանը ներգծած է ω շրջանագծին: ABC եռանկյանը ներգծած ω_1 շրջանագիծը BC հատվածը շոշափում է P կետում, իսկ ABD եռանկյանը ներգծած ω_2 շրջանագիծը AD հատվածը՝ Q կետում: Դիցուք X-ը և Y-ը համապատասխանաբար A կետը չպարունակող BC և B կետը չպարունակող AD աղեղների միջնակետերն են: Ապացուցել, որ XP և YQ ուղիղների հատման կետը պատկանում է ω-ին:

Լուծում 1 X, I, A կետերը և Y, J, B կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա: Ըստ եռաժանիի թեորեմի $BX = XI, YJ = YA$ և $\angle AYJ = \angle BXI$, հետևաբար $\triangle AYJ \sim \triangle BXI$: $YA \perp XA, AJ \perp BI, YB \perp XB$, հետևաբար գոյություն ունի պտտային նմանադրություն, որ BXI եռանկյունը անցնում է AYJ եռանկյանը: Այդ դեպքում $JQ \to BP, AQ \to IP$, հետևաբար Q-ն և P-ն AJY և XBI եռանկյունների համապատասխանաբար կետերն են, որտեղից $YQ \perp XP$, հետևաբար XP և YQ ուղիղների հատման կետը պատկանում է ω-ին:



Լուծում 2 X, I, A կետերը և Y, J, B կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա: Ըստ եռաժանիի թեորեմի $BX = XI, YJ = YA$ և $\angle AYJ = \angle BXI$, հետևաբար $\triangle AYJ \sim$

$\triangle BXI$։

Դիցուք YQ և XP ուղիղները հատվում են K կետում: $\angle JAQ = \angle BIP, \angle AJQ = \angle IBP$, որտեղից $\triangle AJQ \sim \triangle BIP$ հետևաբար $\frac{BP}{JQ} = \frac{IP}{AQ} = \frac{BI}{AJ} = \frac{IX}{AY}$ և $\angle QAY = \angle PIX \Rightarrow \triangle PIX \sim \triangle AYQ \Rightarrow \angle PXI = \angle AYQ \Rightarrow A, X, Y, K$ կետերը գտնվում են մեկ շրջանագծի վրա, հետևաբար XP և YQ ուղիղների հատման կետը պատկանում է ω-ին: