

Լուծումներ

10-րդ դասարան

Առաջին օր (14 փետրվարի, 2026թ)

Խնդիր 1 O կենտրոնով ω շրջանագիծը և A կենտրոնով α շրջանագիծը հատվում են իրարից տարբեր C և D կետերում և $\angle OCA = 90^\circ$: Տրված է ցանկացած E կետ, որը պատկանում է ω շրջանագծին և ընկած է α շրջանագծի ներսում: Դիցուք E կետի համաչափը O կետի նկատմամբ F -ն է և CE ուղիղը հատում է α շրջանագիծը $G \neq C$ կետում: Ապացուցել, որ G, D և F կետերը գտնվում են մեկ ուղղի վրա:

Լուծում Անկյուն $\angle GDF$ -ի մեծությունը արտահայտենք անկյուններ $\angle GDC$ և $\angle CDF$ մեծությունների գումարով:

Քանի որ OC ուղիղը ուղղահայաց է AC -ին, ապա այն շոշափում է α շրջագծին: Ուրեմն

$$\angle GDC = 180^\circ - \angle OCG = 180^\circ - \angle OCE$$

Մյուս կողմից

$$\angle CDF = \angle CEF = \angle CEO$$

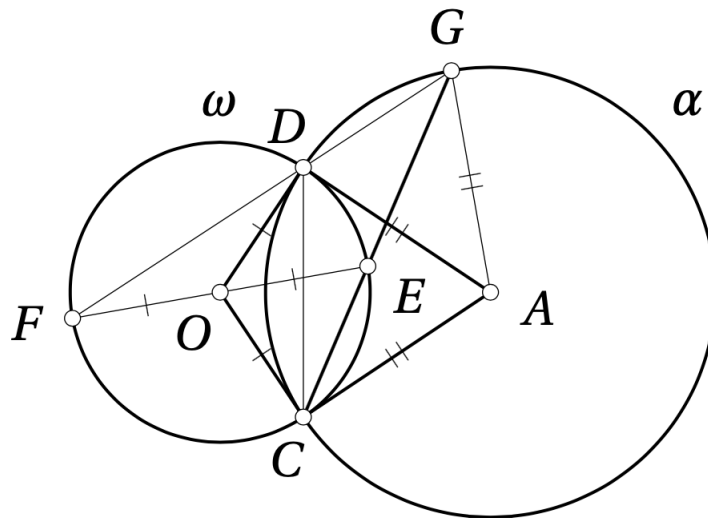
Քանի որ $OC = OE$, ստանում ենք

$$\angle CEO = \angle OCE$$

Հետևաբար

$$\angle GDF = \angle GDC + \angle CDF = 180^\circ - \angle OCE + \angle CEO = 180^\circ$$

Հետևաբար G, D և F կետերը գտնվում են մեկ ուղղի վրա:



Խնդիր 2 Տրված է իրական գործակիցներով

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

բազմանդամը, որտեղ $a_i = a_{n-i}$ ցանկացած $0 \leq i \leq n$ համար և $a_n \neq 0$: Դիցուք $P(x)$ -ի բոլոր իրական արմատներն են $x_1, x_2, \dots, x_k$ առանց կրկնությունների: Ապացուցել, որ

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| \geq k$$

Լուծում Դիցուք c -ն $P(x)$ բազմանդամի ցանկացած իրական արմատ է: Քանի որ $P(0) = a_0 = a_n \neq 0$, ուրեմն $c \neq 0$: Նկատենք, որ

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{c}\right) &= a_n \left(\frac{1}{c}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{1}{c}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{1}{c}\right) + a_0 \\ &= \left(\frac{1}{c}\right)^n (a_0 c^n + a_1 c^{n-1} + \dots + a_{n-1} c + a_n) \\ &= \left(\frac{1}{c}\right)^n (a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0) \\ &= \left(\frac{1}{c}\right)^n P(c) = 0, \end{aligned}$$

որտեղից ստանում ենք $\frac{1}{c}$ -ն նույնպես $P(x)$ -ի արմատ է: Հետևաբար արմատները կարելի է զույգավորել փոխադարձ (հակադարձ) զույգերի:

Յուրաքանչյուր c արմատի համար ունենք

$$|c| + \left|\frac{1}{c}\right| \geq 2$$

Միակ արմատները, որոնք զույգավորվում են իրենք իրենց հետ, 1-ը և -1 -ն են, որոնք երկուսի մոդուլը հավասար է 1: Եթե կան l այդպիսի արմատներ, ապա

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| \geq \frac{k-l}{2} \cdot 2 + l \cdot 1 = k - l + l = k$$

Խնդիր 3 Դիցուք $n \times n$ տախտակի վանդակներում գրված են $1, 2, \dots, n^2$ թվերը, յուրքանջյուրը ճիշտ մեկ անգամ և յուրաքանչյուր վանդակում ճիշտ մեկ թիվ: Յուրքանջյուր քայլի հնարավոր է ընտրել ցանկացած տող կամ սյուն և նրանում գտնվող թվերը ցիկլիկ տեղափոխել (առաջին վանդակում գրված թիվը գնում է երկրորդ վանդակ, երկրորդինը՝ երրորդ վանդակ, և այսպես շարունակ մինչև n -րդ վանդակում գրված թիվը գնում է առաջին վանդակ): Գտնել բոլոր $n > 1$ կենտ ամբողջ թվերը, որոնց համար անկախ սկզբնական դասավորությունից հնարավոր է վերջավոր քանակությամբ քայլերից հետո ստանալ տախտակ, որտեղ ցանկացած $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ համար k -րդ տողում գրված են $(k-1)n+1, (k-1)n+2, \dots, (k-1)n+n$ թվերը ծախից աջ նշված հերթականությամբ:

Լուծում Տես. 11 – 12-րդ դասարանների երրորդ խնդրի լուծման երկրորդ մասը: