Լուծումներ

10-րդ դասարան

Առաջին օր (15 փետրվարի, 2025թ)

Խնդիր 1 Գտնել բոլոր (a, n) բնական թվազույգերը, որոնց համար

$$n^{2n-3} = a^n$$

Լուծում Եթե $n = 1$, ապա $a = 1^{-1} = 1$, հետևաբար $(1, 1)$ զույգը բավարարում է:

Եթե $n > 1$ վերցնենք n ցանկացած p պարզ բաժանարար և դիցուք n-ի պարզ վերլուծության մեջ p-ի աստիճանը հավասար է k: Կստացվի, որ $k(2n-3)\vdots n \Rightarrow 3k\vdots n \Rightarrow 3k \geq n \geq p^k$:

Եթե $p > 3 \Rightarrow p^k \geq 5^k > 3k$ (ապացույցը մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով) ինչը հակասություն է:

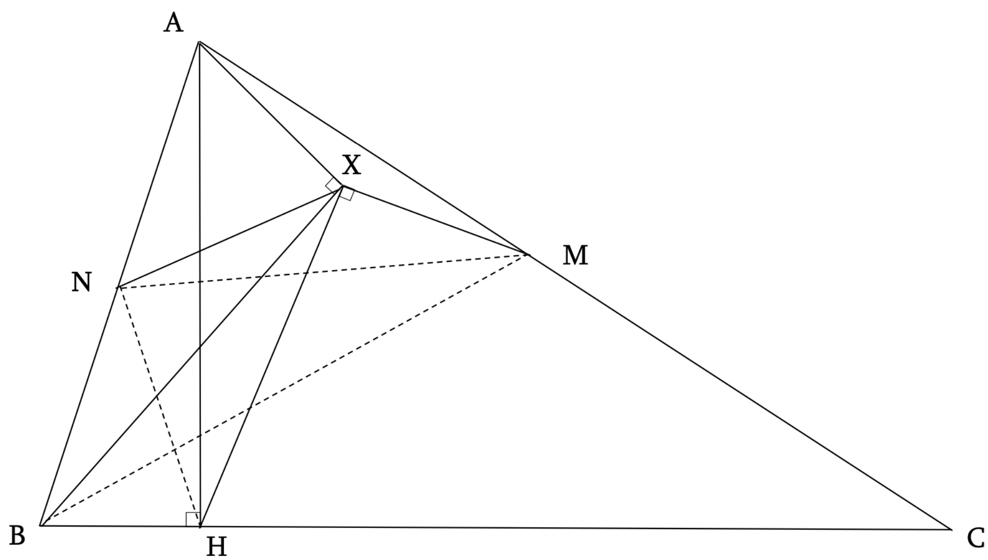
Եթե $p = 3 \Rightarrow 3k \geq 3^k \Rightarrow k \geq 3^{k-1}$, որը ճիշտ է միայն $k = 1$ դեպքում: Այս դեպքում ստանում ենք $3k = 3\vdots n \Rightarrow n = 1$ կամ $n = 3$: $n = 3 \Rightarrow 3^3 = a^3 \Rightarrow a = 3$ և $(3, 3)$ զույգը նույնպես բավարարում է:

Եթե $p = 2 \Rightarrow 3k\vdots 2^k \Rightarrow k\vdots 2^k$, որը հակասություն է:

Հետևաբար բոլոր բավարարող զույգերն են $(1, 1)$ և $(3, 3)$:

Խնդիր 2 ABC սուրանկյուն եռանկյունում AH-ը բարձրություն է, իսկ M-ը AC կողմի միջնակետն է: Դիցուք X կետը այնպիսին է, որ $\angle AXB = \angle HXM = 90^\circ$: Ապացուցել, որ $\angle XMB = 2\angle MBC$:

Լուծում Դիցուք N-ը AB կողմի միջնակետն է: Այդ դեպքում $\angle MBC = \angle NMB$ և $\angle BHA = \angle AXB = 90^\circ$, հետևաբար A, X, H, B կետերով անցնում է շրջանագիծ, որտեղից $\angle BAH = \angle BXH = 90^\circ - \angle B$, հետևաբար $\angle BXM = \angle BNM = 180^\circ - \angle B$, որտեղից B, N, M, X կետերով անցնում է շրջանագիծ և $AN = NX = BN$, հետևաբար $\angle BMN = \angle XMN$, որտեղից $\angle XMB = 2\angle MBC$:



Խնդիր 3 Գտնել բոլոր (m,n) բնական թվազույգերը, որոնց համար $m \times n$ տախտակի վանդակներում հնարավոր է տեղադրել թագուհիներ (յուրքանչյուր վանդակում ամենաշատը մեկ թագուհի), այնպես որ ցանկցած երկու սյունում գտնվող թագուհիների քանակները հավասար լինեն, իսկ ցանկացած երկու տողում գտնվող թագուհիների քանակները իրարից տարբեր լինեն:

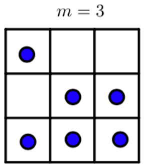
Լուծում Ցույց տանք, որ ցանկացած (m,n) զույգերը բավարարում են, որտեղ $n \geq m$ եթե m-ը կենտ է, կամ $n \geq m-1$ եթե m-ը զույգ է:

$m=1$ դեպքում, ցանկցած n բնական թվի համար $(1,n)$ տախտակի յուրաքանչյուր վանդակում թագուհիներ տեղադրրելվ տեսնում ենք որ այն բավարարում է խնդրի պայմաններին:

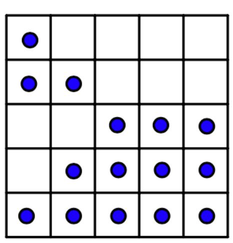
Քանի որ ցանկացած երկու տողերում գտնվող թագուհիների քանակները տարբեր են ապա ամենաշատ թագուհի պարունակող տողում կա գոնե $m-1$ թագուհիներ, հետևաբար սյուների քանակը պետք է լինի գոնե $m-1 \Rightarrow n \geq m-1$: Եթե $m \geq 3$ կենտ թիվ է և $n = m-1$, ապա տողերում թագուհիների քաննկները պետք է լինեն $\{0,1,2,\ldots,m-1\}$, որտեղից բոլոր թագուհիների քանակը կլինի $m(m-1)/2$: Այստեղից յուրքանչյուր սյունում պետք է լինի $m(m-1)/(2(m-1)) = m/2$, որը հակասություն է: Հետևաբար եթե m-ը կենտ թիվ է, ապա $n \geq m$:

Կառուցենք օրինակ (m,m) տախտակի համար, որտեղ $m = 2k-1$: Թագուհիները տեղադրենք ինչպես ցույց է տրված նկարում: Աջ ներքևի $k \times k$ քառակուսում և տախտակի մեջտեղի վանդակից դեպի ներքևի ձախ անկյան վանդակի անկյունագծում և նրանից ներքև գտնվող յուրքանչյուր վանդակում տեղադրենք թագուհի: Ինպես նաև թագուհիներ տեղադրենք քառակուսու մեջտեղի վանդակից դեպի վերև ձախ անկյան վանդակի անկյունագծի և նրանից ներքև գտնվող $k-1 \times k-1$ կողմերով եռանկյան մեջ: Նկատենք, որ յուրքանչյուր սյունում կլինի k հատ թագուհի և տղերում գտնվող թագուհիների քանակները կլինեն $\{1,2,\ldots,2k-1\}$: Հետևաբար $(2k-1,2k-1)$ զույգը բավարարում է խնդրի պայմաններին:

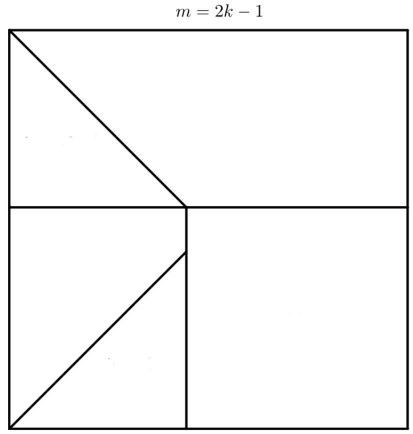
$m=3$



$m=5$



$m=2k-1$



Եթե $m \geq 2$ զույգ թիվ է, ապա $m \times m-1$ տախտակի առաջին տողից բացի $m-1 \times m-1$ տախտակը լրացնենք վերևում նշված եղանակով և առաջին տողում ոչ մի թագուհի չտեղադրենք: Նկատենք որ նշվածը բավարարում է խնդրի պայմաններին:

Այժմ ցույց տանք, որ եթե (m,n) զույգը բավարարում է խնդրի պայմաններին, ապա $(m,n+1)$ զույգը նույնպես կբավարարի խնդիր պայամններին, ինչը կավարտի խնդրի լուծումը: Դիցուք $m \times n$ տախտակը լրացված է ինչ որ եղանակով և յուրքանչյուր սյունում կա x հատ թագուհի: Վերցնենք $m \times n + 1$ տախտակի վերջին սյունից բացի $m \times n$ մասը և այն լրացնենք նույն եղանակով և վերջին սյունում տեղադրենք x հատ թագուհի այն տողերում որտեղ գտնվում են ամենաշատ թագուհիները: Նկատել, որ նշվածը կբավարարի խնդրի պայմաններին: