ՀԱՄԱՀԱՅԿԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

Մաթեմատիկա - Լուծումներ

Կրտսեր խումբ (VIII, IX դասարան)

1) Լուծել $x^2-x=13(y^2-y)$ հավասարումը, որտեղ x-ը և y-ը փոխադարձաբար պարզ բնական թվեր են:

Լուծում: Պարզ է, որ $x=y=1$ լուծում է: Քանի, որ$(x,y)=1$, ապա$\frac{x-1}{y}=\frac{13(y-1)}{x}=p\in N$: Այդ դեպքում $x-1=py$ և $13(y-1)=px$, հետևաբար $13(y-1)=p(yp+1)\Leftrightarrow y=\frac{p+13}{13-p^2}\Longrightarrow 13-p^2>0\Longrightarrow p=1;2;3\Longrightarrow p=3, y=4, x=13$: Պատ. $(1,1);(13,4)$:

2) Դիցուք $a_1,a_2,\cdots,a_n$ թվերը բոլոր այն յոթանիշ թվերն են,որոնց թվանշանները չեն կրկնվում և գրվում են $1,2,3,4,5,6,7$ թվանշաններով: Կարելի՞ է արդյոք $a_1*a_2*\cdots*a_n$ արտահայտությունում աստղանիշների փոխարեն գրել $+$ կամ – նշանները այնպես, որ

ա) ստացված արտահայտության արժեքը հավասար լինի 0:

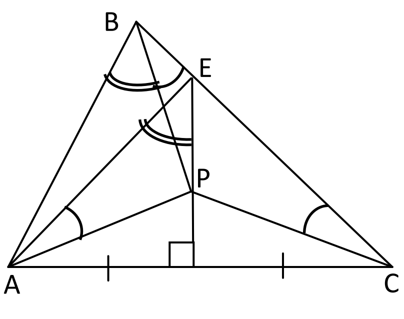
բ)արտահայտության արժեքը լինի բնական և բաժանվի 111–ի:

Լուծում:ա) Պարզ է, որ $n=7!$: (a_i,a_j) թվերը համարենք բարեկամ, եթե $a_i+a_j=8888888=a$: Այդպիսի զույգերի քանակը հավասար է $\frac{7!}{2}$, քանի, որ կամայական $\overline{x_1x_2\cdots x_7}$ թվին համապատասխանում է $\overline{(8-x_1)(8-x_2)\cdots(8-x_7)}$ թիվը: Ենթադրենք $(a_1,a_2),(a_3,a_4),\cdots,(a_{n-1},a_n)$ զույգերը բարեկամ են: Այդ դեպքում $A=(a_1*a_2)*(a_3*a_4)*\cdots*(a_{n-1}*a_n)=(a_1+a_2)*(a_3+a_4)*\cdots*(a_{n-1}+a_n)$ արտահայտությունում բարեկամ թվերի միջև, աստղանիշի փոխարեն գրենք $+$ նշանը:Քանի, որ A արտահայտությունում բարեկամ զույգերի քանակը զույգ է, հետևաբար աստղանիշի փոխարեն հերթագայությամբ գրելով $-$ և $+$ նշանները, կստանանք $A=0$:

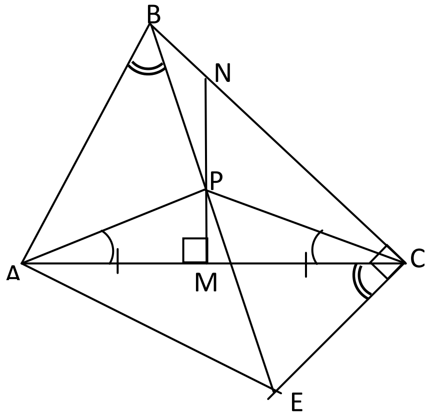
բ) Տես ավագ խումբ, խնդիր 2–ի լուծումը:

3) Ոչ հավասարասրուն ABC սուրանկյուն եռանկյան ներսում, AC կողմի միջնուղղահայացի վրա վերցրել են P կետ այնպես, որ $\angle PAC+\angle PCB+\angle PBA=90°$: AC կողմի միջնուղղահայացին պատկանող կամայական K կետից տարել են AB ուղղին զուգահեռ ուղիղ, որը BC ուղիղը հատում է F կետում: Ապացուցել, որ F,P,K,C կետերով անցնում է շրջանագիծ:

Լուծում1: Նախ ապացուցենք, որ P–ն ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Դիցուք



AC կողմի միջնուղղահայացը BC ուղղիղը հատում է E կետում: Այդ դեպքում $\angle EAC=\angle ECA$ և $\angle PAC=\angle PCA$, հետևաբար $\angle EAP=\angle ECP$: Քանի, որ $\angle PAC+\angle PCB+\angle PBA=\angle EAP+\angle PAC+\angle AEP=90°\Longrightarrow\angle AEP=\angle ABP$, հետևաբար A,B,E,P կետերով անցնում է շրջանագիծ, հետևաբար $\angle EAP=\angle EBP=\angle BCP$, որտեղից հետևում է, որ P–ն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Դիցուք Kկետից AB–ին տարված զուգահեռը AC ուղիղը հատում է T կետում: Քանի, որ $\angle BCP=\frac{1}{2}(180°-\angle BPC)=90°-\frac{\angle BPC}{2}=90°-\angle BAC$ և $\angle PKF=90°-\angle ATK=90°-\angle BAC$, որտեղից $\angle BCP=\angle PKF$, հետևաբար F,P,K,C կետերով անցնում է շրջանագիծ:



Լուծում 2: Դիցուք C կետում BC հատվածին տարված ուղղահայացը BP ուղղի հետ հատվում է Eկետում: Այդ դեպքում $\angle ABP = \angle ACE$, որտեղից հետևում է, որ $ABCE$ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ: Քանի, որ $\angle BCE = 90°$, ապա BE–ն տրամագիծ է: $P \in BE, P \in MN$, որտեղից P–ն ABC եռանկյան տրամագիծն է: Մնացածը առաջին լուծման նման:

Ավագ խումբ (X, XI, XII դասարան)

1) Ապացուցել $\frac{3x}{3-x}+\frac{2y}{2-y}+\frac{z}{1-z} \geq \frac{6}{5}$ անհավասարությունը, որտեղ $x, y, z > 0$ և $x+y+z=1$: Երբ տեղի ունի հավասարության դեպքը:

Ապացույց: $\frac{3x}{3-x}+\frac{2y}{2-y}+\frac{z}{1-z}=\frac{x}{1-\frac{x}{3}}+\frac{y}{1-\frac{y}{2}}+\frac{z}{1-z}=\frac{x^2}{x-\frac{x^2}{3}}+\frac{y^2}{y-\frac{y^2}{2}}+\frac{z^2}{z-z^2} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}+z^2\right)} \geq \frac{1}{1-\frac{(x+y+z)^2}{3+2+1}}=\frac{6}{5}$:
Հավասարությունը տեղի ունի, երբ $\frac{x}{x-\frac{x^2}{3}}=\frac{y}{y-\frac{y^2}{2}}=\frac{z}{z-z^2}$և$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=z \Rightarrow z=\frac{1}{6},\ y=\frac{1}{3},\ x=\frac{1}{2}$:

2) $ABCDEF$ ուռուցիկ վեցանկյան AD անկյունագիծը հատում է FC և BE անկյունագծերը համապատասխանաբար M և K կետերում, իսկ FC անկյունագիծը հատում է BE անկյունագիծը N կետում այնպես, որ $AM=MN=BN, CN=NK=KD, KE=MK=FM$: Դիցուք FK և ME, BM և AN, ND և CK հատվում են համապատասխանաբար N_0, K_0 և M_0կետերում: Ապացուցել, որ

ա) N_0, M_0 և K_0 կետերից համապատասխանաբար MK, NK և MN ուղիղներին տարված ուղղահայացները հատվում են մեկ կետում:

բ) AMF, DKE, BCN եռանկյունների M, K, N գագաթներից տարված բարձրությունները պարունակող ուղիղները հատվում են մեկ կետում:

Լուծում1:ա)Դիցուք FMK և MKE անկյունների կիսորդները հատվում են N_1 կետում: Քանի, որ $FM=MK=KE \Rightarrow MN_1 \perp FK, KN_1 \perp ME \Rightarrow N_1N_0 \perp MK$, ուստի N_1-ը MNK եռանկյան առներգծած շրջանագծի կենտրոնն է: Նմանապես K_1–ը և M_1-ը MNK եռանկյան MN և KN կողմերը շոշափող առներգծած շրջանագծերի կենտրոններն են: Դիցուք N_2, M_2, K_2 կետերը MNK եռանկյան MK, NK, MN կողմերը շոշափող առներգծած շրջանագծերի շոշափման կետերն են: Ենթադրենք N_1N_2–ը և K_1K_2-ը հատվում են O կետում: Այդ դեպքում $OM^2-{MN_2}^2=OK^2-{KN_2}^2$ և $OM^2-{MK_2}^2=ON^2-{NK_2}^2 \Rightarrow OK^2-{MK_2}^2=ON^2-{MN_2}^2 \Rightarrow OK^2-{KM_2}^2=ON^2-{NM_2}^2 \Rightarrow O$ կետից NK–ին տարված ուղղահայացի հիմքը M_2 կետն է: Վերջինս Կառնոյի թեորեմի մասնավոր դեպքն է:

Թեորեմ:(Կառնո): Ապացուցել, որ ABC եռանկյան կողմերը պարունակող ուղիղներին պատկանող A_1, B_1, C_1 կետերից համապատասխանաբար BC, AC, AB կողմերին տարված ուղղահայացները հատվում են այն և միայն այն դեպքում, երբ $A_1B^2+C_1A^2+B_1C^2=B_1A^2+A_1C^2+C_1B^2$: (թեորեմը ճիշտ է հարթության կամայական A_1, B_1, C_1 կետերի համար):

Լուծում2:ա) Դիցուք I-ն MNK եռանկյան ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է:Քանի, որ $\angle IMK = \angle MKN_0$ և $\angle IKM = \angle KMN_0$, IMN_0K-ն զուգահեռագիծ է, հետևաբար MK հատվածին տարված IP և N_0N_2 ուղղահայացների հիմքերը համաչափ են MK հատվածի միջնակետի նկատմամբ, ուստի N_2–ը

MK կողմը շոշափող առներգծած շրջանագծի շոշափման կետն է: Մնացածը առաջին լուծման նման:

բ) Ենթադրենք MNK-ն սուրանկյուն եռանկյուն է: Քանի,որ $AM = MN, MF = MK$ և $\angle AMF = \angle NMK$, հետևաբար $\triangle AMF = \triangle NMK \Longrightarrow \angle MKN = \angle AFM = \alpha$: Դիցուք MP–ն AMF եռանկյան բարձրությունն է, հետևաբար $\angle PMF = \angle NMK = 90° - \alpha$: Դիցուք G–ն MNK եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Այդ դեպքում $\angle MGN = 2\alpha \Longrightarrow \angle NMG = 90° - \alpha \Longrightarrow G$–ն պատկանում է PM ուղղին: Նմանապես BNCևDKE եռանկյունների N և K գագաթներից տարված բարձրությունները պարունակող ուղիղները անցնում են G–ով: Նմանապես, երբ MNK-ն բութանկյուն եռանկյուն է:

2) Դիցուք $a_1, a_2, \cdots, a_n$ թվերը բոլոր այն յոթանիշ թվերն են, որոնց թվանշանները չեն կրկնվում և գրվում են 1,2,3,4,5,6,7 թվանշաններով: Ապացուցել, որ $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$ արտահայտությունում աստղանիշների փոխարեն կարելի է գրել + կամ – նշանները այնպես, որ ստացված արտահայտության արժեքը լինի բնական և բաժանվի նախորոք ընտրված 1263–ից փոքր կամայական բնական թվի :

Լուծում: Պարզ է, որ $n = 7!$: (a_i, a_j) թվերը համարենք բարեկամ, եթե $a_i + a_j = 8888888 = a$: Այդպիսի զույգերի քանակը հավասար է $\frac{7!}{2}$, քանի, որ կամայական $\overline{x_1 x_2 \cdots x_7}$ թվին համապատասխանում է $\overline{(8 - x_1)(8 - x_2) \cdots (8 - x_7)}$ թիվը: Ենթադրենք $(a_1, a_2), (a_3, a_4), \cdots, (a_{n-1}, a_n)$ զույգերը բարեկամ են: Այդ դեպքում $A = (a_1 * a_2) * (a_3 * a_4) * \cdots * (a_{n-1} * a_n) = (a_1 + a_2) * (a_3 + a_4) * \cdots * (a_{n-1} + a_n)$ արտահայտությունում բարեկամ թվերի միջև, աստղանիշի փոխարեն գրենք + նշանը, իսկ մնացած աստղանիշների փոխարեն գրենք + կամ $-$ նշանը: Ենթադրենք – նշանների քանակը հավասար է k–ի: Դիցուք $B = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{n-1} + a_n) = \frac{7!}{2} a$,այդ դեպքում $A_k = B - 2ka = 2a(1260 - k)$, որտեղից A_k-ն բաժանվում է $1260 - k$-ի, որտեղ $0 < k < 1260$:

Երբ $k = 629$, ապա $A_{529} = 2a(1260 - 629) = 1262a$:

Երբ $k = 630$, ապա$A_{630} = 2a(1260 - 630) = 1260a$:

Բերենք օրինակ, երբ A–ն բաժանվում է 1261–ի: Դիտարկենք $(\overline{c_i 12}, \overline{e_i 76})$ և $(\overline{c_i 21}, \overline{e_i 67})$ բարեկամ զույգերը, որտեղ $1 \leq i \leq 120$: Պարզ է, որ $\overline{c_i 21} - \overline{c_i 12} = \overline{e_i 76} - \overline{e_i 67} = 9$: Այդ դեպքում $A = (a_1 * a_2) * (a_3 * a_4) * \cdots * (a_{n-1} * a_n) = (\overline{c_1 12} - \overline{c_1 21}) + (\overline{e_1 67} - \overline{e_1 76}) + (\overline{c_2 12} - \overline{c_2 21}) + (\overline{e_2 67} - \overline{e_2 76}) + \cdots + (\overline{c_{11} 12} - \overline{c_{11} 21}) + (\overline{e_{11} 67} - \overline{e_{11} 76}) + (a_{23} + a_{24}) + (a_{25} + a_{26}) + B$, որտեղ $B = (a_{27} + a_{28}) * (a_{29} + a_{30}) * \cdots * (a_{n-1} + a_n)$:Քանի, որ B արտահայտությունում բարեկամ զույգերի քանակը զույգ է, հետևաբար աստղանիշի փոխարեն հերթագայությամբ գրելով $-$ և + նշանները, կստանանք $B = 0$, որտեղից $A = 2a - 198 = 2(a - 99)$, որը բաժանվում է 1261–ի: