

**Խնդիր 4)** Դիցուք  $a, b, c$  կողմերով եռանկյան համար տեղի ունի

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{c+b-a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

հավասարությունը: Ապացուցեք, որ եռանկյունը հավասարակողմ է:

Լուծում:  $\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{c+b-a} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{c+b-a} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{c+b-a} \right) = \frac{a}{a^2-(b-c)^2} + \frac{b}{b^2-(a-c)^2} + \frac{c}{c^2-(a-c)^2} \geq \frac{a}{a^2} + \frac{b}{b^2} + \frac{c}{c^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} : (a^2 > (b-c)^2, b^2 > (a-c)^2, c^2 > (a-c)^2)$

Հավասարությունը տեղի ունի, երբ  $a=b=c$ :

**Խնդիր 5)**  $ABC$  սուրանկյուն եռանկյան  $BD$  բարձրության շարունակությունը  $ABC$  եռանկյան  $R$  շառավիղով արտագծած շրջանագիծը հատում է  $E$  կետում: Դիցուք  $K$ -ն  $BE$  հատվածի այնպիսի կետ է, որ  $BK \leq \frac{BE}{2}$ : Ապացուցեք, որ  $AK+KC \geq 2R$ :

Լուծում: 1. Դիցուք  $T$ -ն  $BE$  հատվածի միջնակետն է, իսկ  $A$  կետից  $BE$ -ին տարված զուգահեռ ուղիղը շրջանագիծը հատում է  $F$  կետում, իսկ  $O$ -ն շրջանագծի կենտրոնն է: Դիցուք  $P$ -ն  $AF$  հատվածի միջնակետ է: Քանի,  $OT \perp BE, OP \perp AF$  և  $AF \parallel BE$ , հետևաբար  $TP \perp AF$ , որտեղից  $AT + TC = FT + TC \geq FC = 2R$  :

1\* Դիցուք  $AT$  ուղիղը  $KC$  հատվածը հատում է  $M$  կետում: Այդ դեպքում  $AK + KC = AK + KM + MC \geq AM + MC = AT + TM + MC \geq AT + TC \geq 2R$ :

2\* Քանի որ  $\angle FAT = \angle AFT$  և  $BT \geq BK$ , հետևաբար  $\angle KFA \geq \angle FAK$ , որտեղից  $AK + KC \geq FK + KC \geq 2R$ :

**Խնդիր 6)** Գրատախտակին գրված է 2022 թիվը: 2 դասընկեր խաղում են “Գրիր 0”:  
Նրանք հաջորդաբար կատարում են քայլեր, յուրաքանչյուր քայլի գրատախտակին գրված թիվը փոխարինելով կա՛մ  $k$ -ով մեծ, կա՛մ  $k+1$ -ով փոքր թվով ( $k \in \mathbb{N}$ ):  
Խաղը հաղթում է նա, ով առաջինն է գրատախտակին գրում 0 թիվը:  
 $k$ -ի ո՞ր արժեքների դեպքում առաջինը քայլ կատարած աշակերտը ունի հաղթական մարտավարություն:

Լուծում: Դեպք 1.  $k \geq 2022$

Պնդում. 2-րդը քայլ կատարած մասնակիցը ունի հաղթական մարտավարություն Ապացույց.

2-րդ խաղացողը յուրաքանչյուր քայլի կատարում է իր հակառակորդի կատարած քայլից տարբերվող քայլ: Այսպիսով 2 քայլ անց գրատախտակին գրված թիվը փոխարինվում է 1-ով փոքր թվով: Քանի որ  $k \geq 2022$  1-ին խաղացողը իր հերթին

կարող է կա՛մ 2022-ից փոքր թվից հանել 2022-ից մեծ թիվ ստանալով 0-ից փոքր պատասխան, կա՛մ գումարել դրական թվին մեկ այլ դրական թիվ ստանալով 0-ից մեծ պատասխան, հետևաբար 1-ինը քայլ կատարած աշակերտը ոչ մի կերպ չի ստանա 0 թիվը, մինչդեռ 2-րդը քայլ կատարած աշակերտը 4044 քայլ անց գրատախտակին կգրի 0 թիվը:

Դեպք 2.  $k \in [1, 1010]$

Պնդում. երկրորդ մասնակիցն ունի չպարտվելու մարտավարություն.

Ապացույց.

Կատարենք հակասող ենթադրություն ըստ որի 2-րդ մասնակիցը պարտվում է: Առաջինը քայլ կատարած հակառակորդը գրատախտակին գրել է կա՛մ 2021-  $k$ , կա՛մ 2022+  $k$  թիվը: Այնուհետև 2-րդ մասնակիցը մեծացում է թիվը  $k$ -ով և հաջորդող բոլոր քայլերին կատարում է հակառակորդի կատարած քայլից տարբերվող քայլ և ստանում իր նախորդ գրած թվից 1-ով փոքր թիվ: հաջորդող  $2k-2$  քայլերի ընթացքում 2-րդ մասնակցի գրած յուրաքանչյուր թիվ  $\geq 2022-k$ ,  $2021-2k \geq 1 \Rightarrow$  առաջին մասնակիցը չի կարող գրել 0:

$2k$ -քայլ անց 2-րդ մասնակիցը գրատախտակին գրում է այն թիվը որը գրված է եղել առաջին քայլից հետո, ինչը նշանակում է որ առդեն 1-ին խաղացողը չունի պարտությունից խուսափելու մարտավարություն: ՀԱԿԱՍՈՒԹՅՈՒՆ

Դեպք 3.  $k \in [1011, 2021]$

Պնդում. հաղթում է առաջինը քայլ կատարած աշակերտը:

Ապացույց.

Առաջին քայլով գրատախտակին գրում է 2021- $k$ : Յուրաքանչյուր հաջորդող քայլի կատարում է հակառակորդի քայլից տարբերվող քայլ գրատախտակին գրելով իր գրած նախորդ թվից 1-ով փոքր թիվ,  $4042-2k$  քայլ անց գրելով 0:  $k \geq 2021-k \Rightarrow$  2-րդ մասնակիցը չի կարող գրել 0

Պատասխան.՝  $k \in [1011, 2021]$

# ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՆԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

## 10-րդ դասարանի երկրորդ օրվա չափանիշներ

4.

Պիտագորասի երկու գումարելիների գումար

1 միավոր,

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b} \geq \frac{2}{a}$$

+4 միավոր

ավարտել

+2 միավոր :

Մյուս եղանակները գնահատվում են համարժեք չափանիշներով:

Նանրահաշվական ձևափոխությունները, որոնք ավարտին հասցված չեն գնահատվում են առավելագույնը 2 միավոր:

5.

$$AK + KC \geq AT + TC$$

1 միավոր,

$F$  կետի կառուցում

+2 միավոր,

$$FT = AT$$

+1 միավոր,

$$FC = 2R$$

+1 միավոր,

ավարտել

+2 միավոր :

6.

$$k \geq 2022 \text{ դեպքը դիտարկել}$$

2 միավոր,

$$1 \leq k \leq 1010 \text{ դեպքը դիտարկել}$$

3 միավոր,

$$1011 \leq k \leq 2021 \text{ դեպքը դիտարկել}$$

3 միավոր,

առանձին միավորներ, որոնք չեն գումարվում այլ միավորների. խաղացողներից մեկը միշտ անում է մյուսի հակառակը քայլը՝ մարտավարությունը հասկանալ  $\rightarrow$  1 միավոր

լրիվ պատասխանը հասկանալ առանց ապացույցի, կամ բացառել երկու ինտերվալներից գոնե մեկը առանց ապացույցի բայց որոշ բացատրությունով  $\rightarrow$  1 միավոր