

IX դասարան

Խնդիր 1: Ապացուցել, որ ցանկացած q իրական թվի համար $x^3 - 24x + q = 0$ հավասարումը չի կարող ունենալ մեկից ավելի բնական լուծում:

Լուծում: Ենթադրենք, որ $x^3 - 24x + q = 0$ հավասարումը ունի $a \neq b$ բնական արմատներ: Այդ դեպքում $a^3 - 24a + q = 0$ և $b^3 - 24b + q = 0$, որտեղից $(a - b)(a^2 + ab + b^2 - 24) = 0 \Rightarrow a^2 + ab + b^2 = 24$: $a < 5 \Rightarrow a = 1, 2, 3, 4$ դեպքերից յուրաքանչյուրում որևէ մեկի դեպքում $a^2 + ab + b^2 = 24$ հավասարումը բնական լուծում չունի:

Խնդիր 2: Գտնել վերջավոր քանակությամբ բնական թվերից բաղկացած X և Y բազմությունների զույգերը, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

ա) $|X| = |Y| > 2$,

բ) X և Y բազմություններն ունեն միայն մեկ ընդհանուր էլեմենտ, այսինքն $|X \cap Y| = 1$,

գ) X բազմությանը պատկանող ցանկացած երկու տարբեր թվերի գումարը պատկանում է Y -ին,

դ) $3 \in X$ և $5 \in Y$:

* $|X|$ -ը X բազմության տարրերի քանակն է:

Լուծում: Դիցուք $\{X\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$: Ենթադրենք $x_1 < x_2 < \dots < x_n \Rightarrow x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_2 + x_3 < x_2 + x_4 < \dots < x_{n-3} + x_{n-2} < x_{n-2} + x_{n-1} < x_{n-1} + x_n$:

$$n = |X| = |Y| \geq 2(n - 2) + 1 \Rightarrow n \leq 3:$$

Դիցուք $X = \{a, b, c\}$: Ենթադրենք $a < b < c \Rightarrow a < b < a + b < a + c < b + c \Rightarrow \{Y = \{a + b, a + c, b + c\}\}$: Քանի, որ $c < a + c < b + c$ և $|X \cap Y| = 1 \Rightarrow c = a + b$

1) $a \geq 3 \Rightarrow b \geq 4 \Rightarrow b + c > a + c > a + b \geq 7 \Rightarrow 5 \notin Y$

2) $b = 3 \Rightarrow a \in \{1, 2\}$

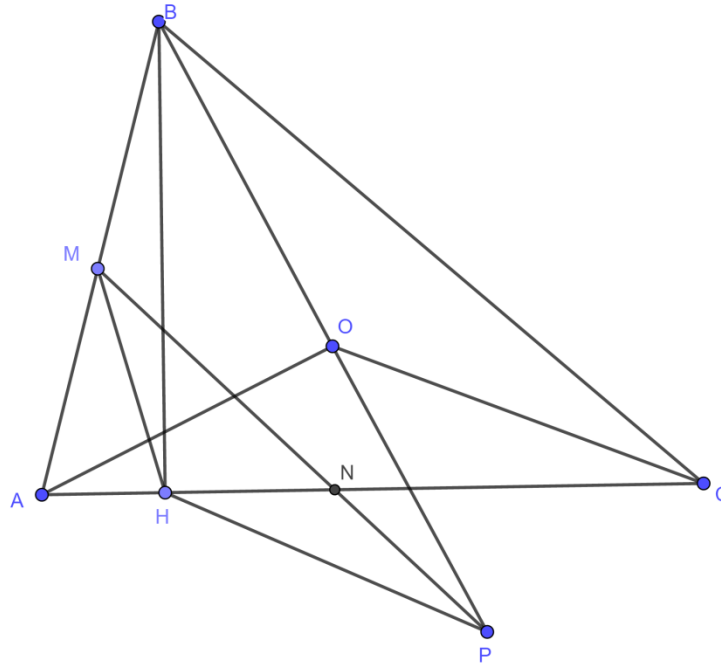
Եթե $a = 1 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow X = \{1, 3, 4\}, Y = \{4, 5, 7\}$

Եթե $a = 2 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow X = \{2, 3, 5\}, Y = \{5, 7, 8\}$

3) $c = 3 \Rightarrow a = 1, b = 2 \Rightarrow X = \{1, 2, 3\}, Y = \{3, 4, 5\}$: Պատասխան՝ 3:

3) Դիցուք H -ը ABC սուրանկյուն եռանկյան BH բարձրության հիմքն է, իսկ O -ն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Դիցուք H կետով անցնող և OC ուղղին զուգահեռ ուղիղը BO ուղիղը հատում է P կետում: Ապացուցել, որ AB և AC հատվածների միջնակետերը և P կետը գտնվում են մեկ ուղղի վրա:

Լուծում:



Դիցուք M -հատվածի AB հատվածի միջնակետն է, PM -ը հատվածը հատում է N կետում և $\angle A = \alpha, \angle B = \beta : \angle ABH = 90^\circ - \alpha = \angle OBC = \angle OCB \Rightarrow \angle COP = 180^\circ - 2\alpha = \angle OPH$:

$HM = MB \Rightarrow \angle AMH = 180^\circ - 2\alpha = \angle OPH$, հետևաբար H, M, B, P կետերով անցնում է շրջանագիծ, հետևաբար $\angle HMP = \angle HBP$:

$\angle AMN = 180^\circ - 2\alpha + \angle HMN = 180^\circ - 2\alpha + \angle HBP = \beta \Rightarrow MN \parallel BC$, հետևաբար N -ը AC կողմի միջնակետն է: