9-րդ դասարան

Խնդիր 4: Դիցուք տրված է n բնական թիվը և սեղանին դրված են 2n հատ քարտեր: Քարտերից մեկի վրա գրված է 1, երկրորդի վրա գրված է 2, երրորդի վրա գրված է 3 և այդպես շարունակ վերջինի վրա գրված է 2n: Հովհաննեսն ու Նարեն խաղում են հետևյալ խաղը. յուրաքանչյուր քայլի սկզբում Հովհաննեսը, իսկ հետո Նարեն (Նարեն տեսնում է Հովհաննեսի ընտրած քարտը) ընտրում են մեկական քարտեր և գրատախտակին գրում են այդ երկու քարտերի վրա գրված թվերի գումարը: Այդպիսի n հատ քայլերից հետո քարտերն ավարտվում են, որից հետո հաշվում են գրատախտակին գրված թվերի արտադրյալը: Եթե այդ արտադրյալը բնական թվի քառակուսի է, ապա հաղթում է Նարեն, իսկ հակառակ դեպքում հաղթում է Հովհաննեսը: Պարզել, թե խաղացողներից ո՞ր մեկն ունի հաղթական մարտավարություն:

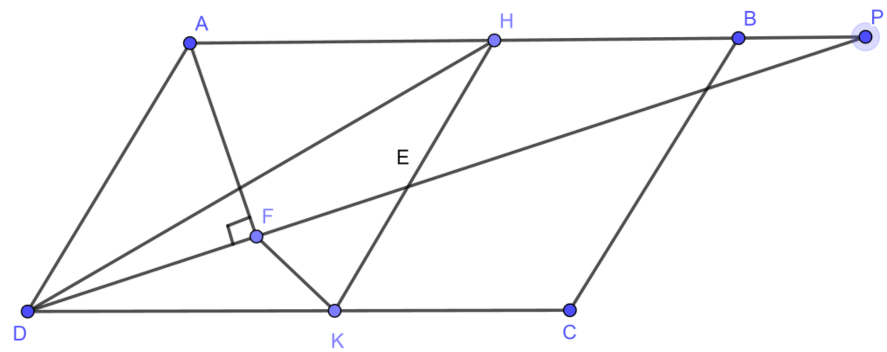
Լուծում: Հաղթում է Նարեն: Դիտարկենք երկու դեպք.

Դեպք 1: $n = 2k$: Այս դեպքում 1-ից մինչև $4k$ բնական թվերը բաժանենք հետևյալ զույգերի $(1, 4k)$, $(2,4k-1), (3, 4k-2), \dots, (2k, 2k+1)$: Ամեն անգամ երբ Հովհաննեսն ընտրում է որևէ թվազույգի թվերից մեկը, Նարեն ընտրում է այդ թվազույգի մյուս թիվը: Այսպիսով Նարեն ապահովում է, որ ամեն քայլից հետո գրատախտակին գրվում է $4k+1$ թիվը: Խաղի ավարտին գրատախտակին գրված կլինեն $2k$ հատ $4k+1$ թիվը, որով նրանց արտադրյալը կլինի $(4k+1)^{2k}$,որը բնական թվի քառակուսի է:

Դեպք 2: $n = 2k+1$: Այս դեպքում 1-ից մինչև $4k$ բնական թվերը բաժանենք հետևյալ զույգերի $(1, 5)$, $(2,4), (3, 6)$, $(7, 4k+2)$, $(8,4k+1), (9, 4k), \dots, (2k+4, 2k+5)$: Կրկին ընտրելով նույն մարտավարությունը Նարեն կհասնի նրան, որ գրատախտակին կլինեն գրված երկու հատ 6, մեկ հատ 9 և $2k-2$ հատ $4k+9$: Նրանց արտադրյալը կլինի $18^2 \cdot (4k+9)^{2k-2}$, որը նույնպես բնական թվի քառակուսի է:

Խնդիր 5: Դիցուք $\angle ABC = 40^0$ և $ABCD$ զուգահեռագծի ADC անկյան կիսորդը AB հատվածը հատում է H կետում: Դիցուք K–ն գտնվում է DC հատվածի վրա և $HK \parallel AD$, E-ն HK հատվածի միջնակետն է, իսկ F–ը A կետից DE հատվածին տարված ուղղահայացի հիմքն է: Գտնել DFK անկյան անկյունային չափը:

Լուծում:



Քանի, որ $\angle ADH = \angle HDK = \angle AHD \Longrightarrow AD = AH$ և $HK \parallel AD \Longrightarrow AHKD$ շեղանկյուն է:

Դիցուք DE և AB ուղիղները հատվում են P կետում: Քանի, որ $\varDelta DEK = \varDelta HEP \Longrightarrow HP = DK = AH$: $\angle AFP = 90^0 \Longrightarrow AH = HP = FH$, հետևաբար H կենտրոնով AH շառավիղով շրջանագիծը անցնում է A,F,K,P կետերով, հետևաբար $\angle KHP = 140^0$=2$\angle KFP \Longrightarrow \angle KFP = 70^0 \Longrightarrow \angle DFK = 110^0$:

Խնդիր 6: Ապացուցել, որ ցանկացած $p > 2$ պարզ թվի համար գոյություն ունի միակ n բնական թիվ, որի համար $n^2 + np$ թիվը բնական թվի քառակուսի է:

Լուծում 1: Դիցուք $n^2 + np = a^2$: Այդ դեպքում $np = (a-n)(a+n)$: Դիցուք a և n թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը d թիվն է և $a = bd, n = kd$ ընդ որում $(b,k) = 1$: Տեղադրելով հավասարման մեջ կստանանք, որ $kp = d(b-k)(b+k)$: Քանի որ $(b,k) = 1$ ուստի $(b-k,k) = (b+k,k) = 1$ ուստի $p \vdots (b-k)(b+k)$: Այստեղից հետևում է, որ $b-k = 1, b+k = p$, որտեղից էլ

$$\begin{cases} b = (p+1)/2 \\ k = (p-1)/2 \end{cases}:$$

Տեղադրելով $kp = d(b-k)(b+k)$հավասարման մեջ կստանանք, որ $d = k = (p-1)/2$: Վերականգնելով n -ը կստանանք, որ $n = kd = (p-1)^2/4$: Ստուգումը ցույց է տալիս, որ այն բավարարում է խնդրի պայմանին: Այսպիսով ստացվեց n թվի գոյությունը և միակությունը:

Լուծում 2: Գրենք $n(n+p) = k^2$:

Դեպք 1: $(n,p) = p$: Այդ դեպքում $n = p \cdot m$: Տեղադրելով հավասարման մեջ կստանանք, որ

$$pm(pm+p) = p^2m(m+1) = k^2:$$

Այստեղից կստանանք, որ $m(m+1)$-ը բնական թվի քառակուսի է, որն անհնար է:
Դեպք 2: $(n,p)=1$:
Այս դեպքում $(n,n+p)=1$ և նրանց արտադրյալը բնական թվի քառակուսի է, ուստի երկուսն էլ բնական թվի քառակուսիներ են, այսինքն $n=k^2, n+p=b^2$: Հետևաբար

$$p=(b-a)(b+a):$$

Այսինքն

$$\begin{cases} b=(p+1)/2 \\ k=(p-1)/2 \end{cases}$$

և $n=k^2=(p-1)^2/4$: