Մաթեմատիկայի հանրապետական օլիմպիադա

22 մարտի 2019

9-րդ դասարան – առաջին օր

1) Դիցուք x, y, z, a, b, c թվերը 6-ը չգերազանցող և զույգ առ զույգ իրարից տարբեր բնական թվեր են: Գտնել $xyz + abc - ax - by$ արտահայտության հնարավոր փոքրագույն արժեքը:

Լուծում:

1) $A = xyz + abc \geq 2\sqrt{xyzabc} = 2\sqrt{720} > 52$:

2) $A = 53 \Rightarrow xyz + abc = 2\cdot4\cdot6 + 1\cdot3\cdot5 = 63 \Rightarrow A \neq 53$:

3) $A = 54 \Rightarrow xyz + abc = 1\cdot4\cdot6 + 2\cdot3\cdot5 = 54$:

4) $a > b, x > y \Rightarrow ax + by > ay + bx \Leftrightarrow (a-b)(x-y) > 0$:

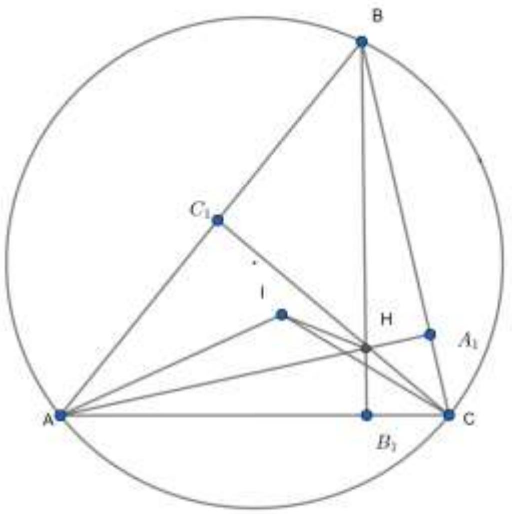
5) $\max\{ax + by\} = 6\cdot5 + 4\cdot3 = 42$, ուստի $\min\{xyz + abc - ax - by\} = 12$, երբ

$$x = 6, y = 4, z = 2, a = 5, b = 3, c = 1:$$

2) Դիցուք ABC սուրանկյուն եռանկյանը ներգծած շրջանագծի I կենտրոնի AC կողմի նկատմամբ համաչափ կետը գտնվում է ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի վրա: Ապացուցել, որ $\angle IHB = \frac{3}{2}\angle BAC$, որտեղ H-ը ABC եռանկյան բարձրությունների հատման կետն է:

Լուծում: Դիցուք F –ը I –ի համաչափն է AC կողմի նկատմամբ և $\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta, \angle C = 2\gamma$:

$$180^o = 2\beta + \angle AFC = 2\beta + \angle AIC = 2\beta + 90^o + \beta \Rightarrow \beta = 30^o, \Rightarrow \angle AIC = 120^o:$$



$\angle C_1BA_1 + \angle C_1HA_1 = 180^\circ \Rightarrow \angle AHC = \angle C_1HA_1 = 120^\circ$:

$\angle AIC = \angle C_1HA_1 = 120^\circ$, հետևաբար A, I, H, C կետերով անցնում է շրջանագիծ:

$\angle IHB = 180^\circ - \angle IHA - \angle AHB_1 = 180^\circ - \angle ICA - \angle AHB_1 = 180^\circ - \gamma - 2\gamma = 180^\circ - 3\gamma = 180^\circ - 3\left(60^\circ - \alpha\right) =$

$= 3\alpha = \frac{3}{2}\angle BAC$:

3) Թվերի X բազմությունը կոչվում է ազատ, եթե գոյություն չունեն իրարից տարբեր $a, b, c \in X$ թվեր, որոնց համար $a + b = c$: Գտնել n-ի ամենամեծ հնարավոր արժեքը, որ $\{2,3, \dots, n\}$ բազմությունը հնարավոր է տրոհել երկու ազատ ենթաբազմությունների:

Լուծում:

Դիցուք $A = \{2, 3, 4, 11, 12\}$ և $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$: Այդ դեպքում գոյություն չունեն միևնույն խմբից a, b, c թվեր, որոնց համար $a + b = c$, հետևաբար $n \geq 12$:

Ապացուցենք, որ $n = 13$ հնարավոր չէ:

1) Եթե $2,3,4 \in B$ ուստի $5,6,7 \in C$, հետևաբար $11,12,13 \in B$ այսինքն ստացվում է $2,11,13 \in B$:

2) Եթե $2, 3 \in B, 4 \in C \Rightarrow 5 \in C \Rightarrow 9 \in B \Rightarrow 11 \in C$

$3 \in B, 9 \in B \Rightarrow 6 \in C \Rightarrow 5, 6, 11 \in C$:

3) Եթե $2, 4 \in B, 3 \in C \Rightarrow 6 \in C \Rightarrow 9 \in B \Rightarrow 11 \in C$

$4 \in B, 9 \in B \Rightarrow 5 \in C \Rightarrow 5, 6, 11 \in C$:

4) Եթե $2 \in B, 3, 4 \in C \Rightarrow 7 \in B \Rightarrow 9 \in C$

$4 \in C, 9 \in C \Rightarrow 5 \in B \Rightarrow 5, 6, 11 \in B$: