Մաթեմատիկայի հանրապետական օլիմպիադա
23 մարտի 2019

9-րդ դասարան – երկրորդ օր

4) Հայտնի է, որ $n, n+1, \cdots, n+10$ հաջորդական բնական թվերի արտադրյալի և գումարի վերջին հինգ թվանշանները համընկնում են: Գտեք n-ի հնարավոր փոքրագույն արժեքը:

Լուծում 1: Դիցուք $A = n + n+1 + \cdots n+10 = 11(n+5)$ և $B = n(n+1)\cdots(n+10)$:

Քանի, որ 11 հաջորդական բնական թվերից երկուսը բաժանվում են 5-ի, իսկ առնվազն երեքը զույգ է, հետևաբար B –ի վերջին երկու թվանշաններն են 00-ն:

Եթե A –ի վերջին թվանշանները 00 է, ապա $n \vdots 5$:

Այդ դեպքում $n \vdots 5, n+5 \vdots 5, n+10 \vdots 5$, որտեղից $B \vdots 8$ և $B \vdots 125$, որտեղից B –ի վերջին թվանշանները 000-ն է, հետևաբար $11(n+5) \vdots 1000$, հետևաբար $n+5 \vdots 125$:

Այդ դեպքում $n \vdots 5, n+5 \vdots 125, n+10 \vdots 5$, որտեղից $B \vdots 2^5$ և $B \vdots 5^5$, որտեղից B –ի վերջին թվանշանները 00000-ն է, հետևաբար $11(n+5) \vdots 10^5$, որտեղից $n = 10^5 - 5$:

Լուծում 2: Դիցուք $A = n + n+1 + \cdots n+10 = 11(n+5)$ և $B = n(n+1)\cdots(n+10)$:

A -ի և B -ի վերջին հինգ թվանշանները համընկնում են, հետևաբար
$B - A = (n+5)\left(\frac{B}{n+5} - 11\right) \vdots 10^5$:

Քանի, որ $B \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5 \Rightarrow n+5 \vdots 5 \Rightarrow n \vdots 5 \Rightarrow \frac{B}{n+5} \vdots 5$, հետևաբար

$\frac{B}{n+5} - 11$-ը 5–ի չբաժանվող կենտ թիվ է, հետևաբար $n+5 = 10^5 \Rightarrow n = 10^5 - 5$:

5) n –ի որ արժեքների դեպքում $\frac{2019^n + 6^n}{2^n - 1}$ արտահայտության արժեքը ռացիոնալ թվի քառակուսի է:

Լուծում: Դիցուք $\frac{2019^n + 6^n}{2^n - 1} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$, որտեղ $(x, y) = 1$ և $x, y \in \mathbb{N}$, որտեղից

Երբ $n = 1$, ապա $\frac{2019^n + 6^n}{2^n - 1} = 45^2$

$$\frac{2019^n+6^n}{2^n-1}=\left(\frac{x}{y}\right)^2 \Leftrightarrow y^2\left(2019^n+6^n\right)=x^2\left(2^n-1\right)$$

Քանի, որ 2019^n+6^n և 2^n-1 թվերը կենտ են և $(x,y)=1$, հետևաբար x, y թվերը կենտ են:

Քանի, որ x, y թվերը կենտ են, հետևաբար x, y թվերը 4–ի և 8-ի բաժանելիս մնացորդում ստացվում է 1:

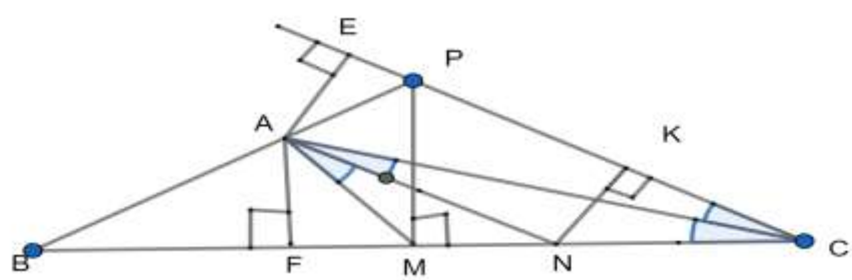
Երբ $n=2k$: 2019^n+6^n -ը 4-ի վրա բաժանելիս մնացորդում ստացվում է 1, իսկ 2^n-1–ը՝ 3 մնացորդ:

Երբ $n=2k+1$: 2019^n+6^n -ը 8-ի վրա բաժանելիս մնացորդում ստացվում է 3, իսկ 2^n-1–ը՝ 7 մնացորդ:

Արդյունքում խնդրի պայմաններին բավարարում է $n=1$ թիվը:

6) ABC եռանկյունում՝ $\angle ABC=30^\circ, \angle ACB=15^\circ$: Դիցուք BC կողմին պատկանող M և N կետերն այնպիսին են, որ $BM=MC$ և $CN=AB$: Ապացուցեք, որ $\angle MAN=\angle CAN$:

Լուծում 1: Դիցուք BC հատվածի միջնուղղահայացը AB ուղիղը հատում է P կետում: Այդ դեպքում AC–ն PCM անկյան կիսորդն է, BP -ն MPC եռանկյան P գագաթին կից արտաքին անկյան կիսորդն է, հետևաբար AM –ը PMC եռանկյան M գագաթին կից արտաքին անկյան կիսորդն է, որտեղից $\angle PMA=\angle AMF=45^\circ$:



Դիցուք $AE \perp PC, AF \perp BC, NK \perp PC$: Քանի, որ $AE = AF = \frac{AB}{2}$, իսկ $NK = \frac{NC}{2} = \frac{AB}{2}$, հետևաբար $AE = NK$, որտեղից $AN \parallel PC$, հետևաբար $\angle NAC = 15^\circ$, իսկ $\angle MAN = \angle AMB - \angle ANM = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$, որտեղից $\angle NAC = \angle MAN = 15^\circ$:

Լուծում 2: Դիցուք BC հատվածի միջնուղղահայացը AB ուղիղը հատում է P կետում:

BPC եռանկյունում CP–ն կիսորդ է, հետևաբար $\frac{AP}{AB} = \frac{CP}{CB}$:

Քանի, որ $PC = PB$ և $AB = NC$, հետևաբար $\frac{AP}{NC} = \frac{BP}{CB} \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{CN}{CB} \Rightarrow AN \parallel PC \Rightarrow \angle NAC = 15^\circ$

Քանի, որ $PC = 2PM \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{PC}{CB} = \frac{2MP}{2BM} = \frac{PM}{BM}$, որտեղից AM –ը BPM եռանկյան կիսորդն է, հետևաբար $\angle MAN = \angle AMB - \angle ANM = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$, որտեղից $\angle NAC = \angle MAN = 15^\circ$: