ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ 9-րդ ԴԱՍԱՐԱՆ
ՄԱՐԶԱՅԻՆ ՓՈՒԼ 2022 թ

Տևողությունը – 180 րոպե

Խնդիր 1: Ապացուցել, որ ցանկացած երկու a, b և k բնական թվերի համար տեղի ունի

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab + \frac{|a-b|}{k+1}$$

անհավասարությունը: Պարզել, թե ե՞րբ տեղի ունի հավասարության դեպքը:

Լուծում: $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab + \frac{|a-b|}{k+1} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{2} \geq \frac{|a-b|}{k+1} \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{2}(|a-b| - \frac{2}{k+1}) \geq 0$: Հավասարության դեպքը տեղի ունի, երբ $k = 1$, ապա $|a-b| = 0$ կամ $|a-b| = 1$ հետևաբար a=b կամ a և b թվերը հաջորդական բնական թվեր են, երբ $k > 1$, ապա $|a-b| = 0$, հետևաբար a=b:

Չափանիշեր

1) $\frac{(a-b)^2}{2} \geq \frac{|a-b|}{k+1}$ +1 միավոր

2) $\frac{|a-b|}{2}(|a-b| - \frac{2}{k+1}) \geq 0$ +2 միավոր

3) երբ $k = 1$, ապա a=b կամ a և b թվերը հաջորդական բնական թվեր են: +1 միավոր

4) երբ $k > 1$, հետևաբար a=b: +1 միավոր

Խնդիր 2: Գտնել բնական թիվը, եթե հայտնի է, որ մեկից մեծ երեք փոքրագույն բաժանարարների գումարը 11 է, իսկ իրենից փոքր երեք մեծագույն բաժանարարների գումարը՝ 190:

Լուծում: Դիցուք $1 < d_1 < d_2 < d_3$, հետևաբար $d_1 + d_2 + d_3 = 11$: Քանի, որ d_1-ը պարզ թիվ է, հետևաբար $d_1 + d_2 + d_3 = 11$ հավասարմանը բավարարում են (2,4,5) և (2,3,6) եռյակները:

Եթե d-ն N թվի բաժանարար է, ապա $\frac{N}{d}$ ևս բաժանարար է:

1)$\frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \frac{N}{5} = 190 \Leftrightarrow N = 200$:

2)$\frac{N}{2} + \frac{N}{3} + \frac{N}{6} = 190 \Leftrightarrow N = 190$:

Չափանիշեր

1) $d_1 + d_2 + d_3 = 11$ հավասարմանը բավարարում են (2,4,5) և (2,3,6) եռյակները:

+2 միավոր

2) Եթե d-ն N թվի բաժանարար է, ապա $\frac{N}{d}$ ևս բաժանարար է: +1 միավոր

3) $\frac{N}{2}+\frac{N}{4}+\frac{N}{5}=190 \Leftrightarrow N=200$: +1 միավոր

4) $\frac{N}{2}+\frac{N}{3}+\frac{N}{6}=190 \Leftrightarrow N=190$: +1 միավոր

Խնդիր 3: ABCD զուգահեռագծի BE P բարձրության վրա վերցրել են H կետ այնպես, որ HC=HD, իսկ M-ը հատվածի միջնակետն է: Ապացուցեք, որ HMD եռանկյան արտագծած շրջանագիծը անցնում է DC հատվածի միջնակետով:

Լուծում: Դիցուք N-ը DC կողմի միջնակետն է: Քանի՛ որ HN⊥CD⇒HN⊥MB BH⊥MN⇒MH⊥BN : Քանի՛ որ DN=BM,DN∥ BM, հետևաբար BNDM-ը զուգահեռագիծ է, հետևաբար MH⊥MD, հետևաբար $\angle HMD=90^0$ և $\angle HND=90^{0'}$,հետևաբար D,M,H,N կետերով անցնում է շրջանագիծ:

Չափանիշեր

1) MH⊥BN +2 միավոր
2) BNDM-ը զուգահեռագիծ է +1 միավոր
3) $\angle HMD=90^0$ +1 միավոր
4) D,M,H,N կետերով անցնում է շրջանագիծ +1 միավոր

Խնդիր 4: $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ բազմությունից ընտրել են k հատ երեք տարր պարունակող ենթաբազմություն այնպես,որ ընտրված ենթաբազմություններից ցանկացած երկուսի հատումը դատարկ չէ: Գտեք k-ի հնարավոր մեծագույն արժեքը:

Լուծում: Երեք տարր պարունակող ենթաբազմությունների քանակը, որոնց տարրերից մեկը 1-ն է , հավասար է $\frac{8\cdot7}{2}=28$: , հետևաբար՝ $k\geq 28$: Երեք տարր պարունակող ենթաբազմությունների քանակը հավասար է $\frac{9\cdot8\cdot7}{6}=84$: Այդ ենթաբազմությունները բաժանենք 28 եռյակների այնպես, որ յուրաքանչյուր եռյակին պատկանող ենթաբազմությունների միավորումը՝ A-ն է, իսկ ցանկացած երկուսի հատումը՝ դատարկ: Եթե ընտրենք $k>28$ ենթաբազմություն, ապա կգտնվի եռյակ, որից ընտրվելէ առնվազն երկու ենթաբազմություն, հետևաբար ընտրվածների մեջ կլինեն երկու ենթաբազմություն, որոնց հատումը դատարկ է, հետևաբար՝ $k=28$:

Չափանիշեր

1) $k\geq 28$ +2 միավոր

2) Երեք տարր պարունակող ենթաբազմությունների քանակը հավասար է $\frac{9\cdot8\cdot7}{6}=84$:

+1 միավոր

3) $k=28$: +2 միավոր