

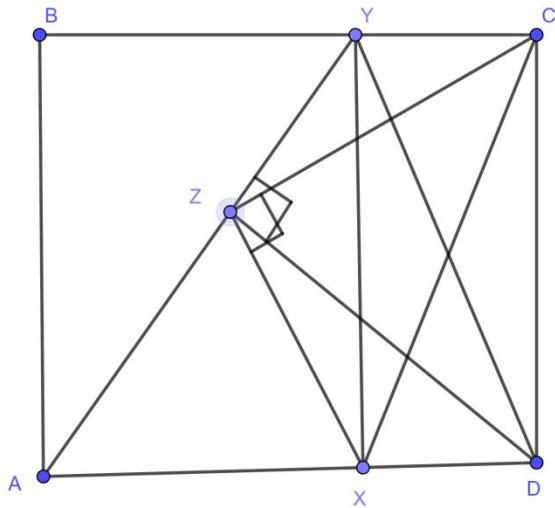
**Խնդիր 4:** Պարզել, թե  $x$  և  $y$  բնական թվերի ո՞ր արժեքների դեպքում  $2^x + 5^y + 2$  արտահայտության արժեքը կլինի բնական թվի քառակուսի:

**Լուծում:** Երբ  $x > 1$ , ապա  $2^x + 5^y + 2$  արտահայտության արժեքը 4-ի բաժանելիս կտա 3 մնացորդ, հետևաբար չի կարող լինել բնական թվի քառակուսի:

Այսինքն  $x = 1$ : Ստացվում է  $5^y + 4 = n^2$ , կամ այլ կերպ  $5^y = (n - 2)(n + 2)$ : Ստացվում է, որ  $n - 2$  և  $n + 2$  արտահայտությունների արժեքները 5-ի աստիճաններ են: Այստեղից ստացվում է, որ  $n = 3$  և  $y = 1$ : Փաստորեն  $x = y = 1$ , որն էլ բավարարում է խնդրի պահանջին:

**Խնդիր 5:** ABCD քառակուսու AD և BC կողմերի վրա վերցրել են համապատասխանաբար X և Y կետեր այնպես, որ  $AY = BX$ : Դիցուք DZ-ը DAY եռանկյան բարձրությունն է: Ապացուցեք, որ XZC անկյան մեծությունը կախված չէ X, Y կետերի դիրքից:

**Լուծում:**



Քանի, որ  $\angle A = \angle B = 90$ ,  $AY = BX$ , իսկ  $AB$ -ն ընդհանուր, հետևաբար  $\triangle ABX = \triangle ABY \Rightarrow AX = BY \Rightarrow CY = DX$ , հետևաբար  $CYXD$ -ն ուղղանկյուն է:

Քանի, որ  $\angle YXD = \angle YCD = \angle YZD = 90^\circ$ , հետևաբար  $Y, Z, X, D, C$  կետերը գտնվում են  $YD$  տրամագծով շրջանագծի վրա, հետևաբար  $\angle CZX = 90$ , հետևաբար  $\angle CZX$  անկյան մեծությունը կախված չէ  $X, Y$  կետերի դիրքից:

**Խնդիր 6:** Դիցուք տրված է  $n$  բնական թիվը և սեղանին դրված են  $2n$  հատ քարտեր: Քարտերից մեկի վրա գրված է 1, երկրորդի վրա գրված է 2, երրորդի վրա գրված է 3 և այդպես շարունակ վերջինի վրա գրված է  $2n$ : Հովհաննեսն ու Նարեն խաղում են հետևյալ խաղը. յուրաքանչյուր քայլի սկզբում Հովհաննեսը, իսկ հետո Նարեն (Նարեն տեսնում է Հովհաննեսի ընտրած քարտը) ընտրում են մեկական քարտեր և գրատախտակին գրում են այդ երկու քարտերի վրա գրված թվերի գումարը: Այդպիսի  $n$  հատ քայլերից հետո քարտերն ավարտվում են, որից հետո հաշվում են գրատախտակին գրված թվերի արտադրյալը: Եթե այդ արտադրյալը բնական թվի քառակուսի է, ապա հաղթում է Նարեն, իսկ հակառակ դեպքում հաղթում է Հովհաննեսը: Պարզել, թե խաղացողներից ո՞ր մեկն ունի հաղթական մարտավարություն:

**Լուծում:** Հաղթում է Նարեն: Դիտարկենք երկու դեպք.

**Չեպ 1:**  $n = 2k$ : Այս դեպքում 1-ից մինչև  $4k$  բնական թվերը բաժանենք հետևյալ զույգերի  $(1, 4k)$ ,  $(2, 4k - 1)$ ,  $(3, 4k - 2)$ , ...,  $(2k, 2k + 1)$ : Ամեն անգամ երբ Հովհաննեսն ընտրում է որևէ թվազույգի թվերից մեկը, Նարեն ընտրում է այդ թվազույգի մյուս թիվը: Այսպիսով Նարեն ապահովում է, որ ամեն քայլից հետո գրատախտակին գրվում է  $4k + 1$  թիվը: Խաղի ավարտին գրատախտակին գրված կլինեն  $2k$  հատ  $4k + 1$  թիվը, որով նրանց արտադրյալը կլինի  $(4k + 1)^{2k}$ , որը բնական թվի քառակուսի է:

**Չեպ 2:**  $n = 2k + 1$ : Այս դեպքում 1-ից մինչև  $4k$  բնական թվերը բաժանենք հետևյալ զույգերի  $(1, 5)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(3, 6)$ ,  $(7, 4k + 2)$ ,  $(8, 4k + 1)$ ,  $(9, 4k)$ , ...,  $(2k + 4, 2k + 5)$ : Կրկին ընտրելով նույն մարտավարությունը Նարեն կհասնի նրան, որ գրատախտակին կլինեն գրված երկու հատ 6, մեկ հատ 9 և  $2k - 2$  հատ  $4k + 9$ : Նրանց արտադրյալը կլինի  $18^2 \cdot (4k + 9)^{2k-2}$ , որը նույնպես բնական թվի քառակուսի է: