

Մաթեմատիկայի հանրապետական օլիմպիադա 22 մարտի 2019

8-րդ դասարան – առաջին օր

1) Դիցուք տրված a, b, c, d թվերից ոչ բոլորն են ամբողջ, սակայն նրանցից ցանկացած երեքի գումարն ամբողջ թիվ է: Կարո՞ղ է արդյոք $ab + cd$ արտահայտության արժեքը լինել ամբողջ թիվ:

Լուծում:

Քանի որ $a + b + c, a + b + d, a + c + d$ թվերն ամբողջ են, ապա ամբողջ կլինի նաև նրանց գումարը, այսինքն $3a + 2(b + c + d) \in \mathbb{Z}$:

Քանի որ $b + c + d$ թիվը նույնպես ամբողջ է, ուստի ամբողջ կլինի $3a$ -ն:

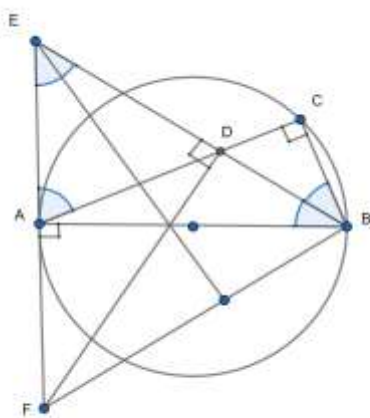
Այսպիսով $a \in \frac{3k \pm 1}{3}$ ու նույնը կարող ենք անդել b, c, d թվերի համար:

Քանի որ նրանցից ցանկացած երեքի գումարը ամբողջ թիվ է, ուստի նրանք բոլորը միասին ունեն $\frac{3k+1}{3}$ կամ $\frac{3k-1}{3}$ տեսքը: Երկու դեպքում էլ ab և cd կոտորակների հայտարարում կլինի 9, իսկ համարիչը երեքի բաժանելիս կտա 1 մնացորդ: Հետևաբար $ab + cd$ արտահայտության արժեքը չի կարող լինել ամբողջ թիվ:

2. Դիցուք C ուղիղ անկյունով ABC ուղղանկյուն եռանկյան BD կիսորդը պարունակող ուղիղը և ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծին A կետից տարված շոշափողը հատվում են E կետում, իսկ F -ը E կետի համաչափն է A կետի նկատմամբ: Դիցուք P -ն FD և AB ուղիղների հատման կետն է: Ապացուցել, որ EP և BF ուղիղները փոխուղղահայաց են:

Լուծում:

AB -ն տրամագիծ է, հետևաբար $AB \perp EF$: Նշանակենք $\angle ABD = \angle CBD = \alpha$: Այդ դեպքում $\angle CDB = \angle EDA = 90^\circ - \alpha$:



$$\angle EBA = \alpha \Rightarrow \angle AEB = 90^\circ - \alpha = \angle EDA \Rightarrow AE = AD = AF \Rightarrow \angle EDF = 90^\circ :$$

AEB եռանկյունում DF -ն և BA -ն բարձրություններ են, իսկ եռանկյան բարձրությունները հատվում են մեկ կետում, հետևաբար $EP \perp BF$:

3) Դիցուք տրված են զույգ առ զույգ իրարից տարբեր 14 բնական թվեր: Խաչիկը հաշվեց դրանցից բոլոր հնարավոր թվազույգերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարներն ու գրեց գրատախտակին: Նա նկատեց, որ իր գրած թվերից ամենամեծի և ամենափոքրի տարբերությունը փոքր է 91-ից: Ապացուցել, որ գրատախտակին գրված թվերից ոչ բոլորն են իրարից տարբեր:

Լուծում:

Ենթադրենք, որ գրատախտակին գրված թվերը տարբեր են: 14 թվերի հնարավոր զույգերի քանակը հավասար է 91: Քանի, որ գրատախտակին գրված թվերի կամայական երկուսի դրական տարբերությունը փոքր է 91-ից, հետևաբար գրատախտակին գրված են 91 հաջորդական թվեր: Այդ թվերից ուղիղ 13 հատը բաժանվում են 7-ի:

Ենթադրենք տրված թվերից k հատը բաժանվում է 13-ի: Այդ դեպքում $\frac{k(k-1)}{2} = 13$, որը ոչ մի բնական արժեքի դեպքում տեղի չունի: