Մաթեմատիկայի հանրապետական օլիմպիադա
23 մարտի 2019

8-րդ դասարան – երկրորդ օր

4. Հայտնի է, որ $n, n+1, \cdots, n+10$ հաջորդական բնական թվերի արտադրյալի և գումարի վերջին երեք թվանշանները համընկնում են: Գտեք n -ի հնարավոր փոքրագույն արժեքը:

Լուծում 1: Դիցուք $A = n+n+1+\cdots n+10 = 11(n+5)$ և $B = n(n+1)\cdots(n+10)$:

Քանի, որ 11 հաջորդական բնական թվերից երկուսը բաժանվում են 5-ի, իսկ առնվազն երեքը զույգ է, հետևաբար B –ի վերջին երկու թվանշաններն են 00-ն:

Եթե A –ի վերջին թվանշանները 00 է, ապա $n \vdots 5$:

Այդ դեպքում $n \vdots 5, n+5 \vdots 5, n+10 \vdots 5$, որտեղից $B \vdots 8$ և $B \vdots 125$, որտեղից B –ի վերջին թվանշանները 000-ն է, հետևաբար $11(n+5) \vdots 1000$, որտեղից $n = 995$:

Լուծում 2: Դիցուք $A = n+n+1+\cdots n+10 = 11(n+5)$ և $B = n(n+1)\cdots(n+10)$:

A -ի և B -ի վերջին երեք թվանշանները համընկնում են, հետևաբար $B - A = (n+5)\left(\frac{B}{n+5} - 11\right) \vdots 1000$:

Քանի, որ $B \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5 \Rightarrow n+5 \vdots 5 \Rightarrow n \vdots 5 \Rightarrow \frac{B}{n+5} \vdots 5$, հետևաբար

$\frac{B}{n+5} - 11$-ը 5–ի չբաժանվող կենտ թիվ է, հետևաբար $n+5 = 1000 \Rightarrow n = 995$

5. $A = \{2, 3, 4, \cdots, 2019^{2019}\}$ բազմությանը պատկանող թվերից k հատը ներկել են կարմիր գույնով: Կատարվում է հետևյալ գործողությունը: Եթե $a, b \in A$ փոխադարձաբար պարզ թվերը ներկված են, ապա ներկվում է նաև $a+b$ թիվը: k -ի որ փոքրագույն արժեքի դեպքում A բազմության բոլոր թվերը նշված գործողության արդյունքում կլինեն ներկված:

Լուծում: Քանի, որ 2,3,4,6 թվերից յուրաքանչյուրը չի կարելի ներկայացնել բազմությանը պատկանող որևէ երկու փոխադարձաբար պարզ թվերի գումարի տեսքով, հետևաբար 2,3,4,6 թվերը ներկված են:

Ապացուցենք, որ $k = 4$:

Քանի, որ $5 = 3+2$ և յուրաքանչյուր կենտ թիվ հավասար էիր նախորդին գումարած երկու

($2n+1 = 2n-1+2$ և $(2n-1, 2) = 1$), հետևաբար բոլոր կենտ թվերը ներկված են:

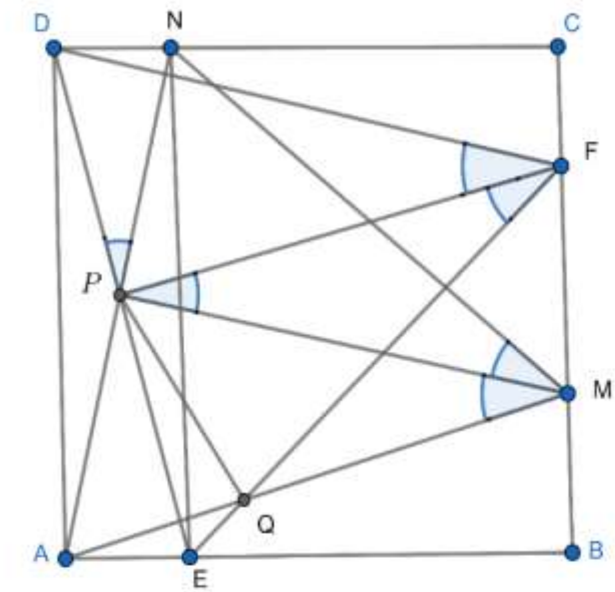
Դիցուք $n = 4p$ և $n \in A$: Այդ դեպքում $4p = 2p+1+2p-1$ և $(2p+1, 2p-1) = (2p+1, 2) = 1$, հետևաբար A բազմությանը պատկանող $n = 4p$ տեսքի թվերը ներկված են:

Դիցուք $n=4p+2$ և $n\in A$: Այդ դեպքում $4p+2=2p+3+2p-1$ և $(2p+3,2p-1)=(2p+1,4)=1$, հետևաբար A բազմությանը պատկանող $n=4p+2$ տեսքի թվերը ներկված են:

6) $ABCD$ քառակուսու AB և DC կողմերի վրա վերցրել են համապատասխանաբար E և N կետեր, իսկ BC կողմի վրա M և F կետեր այնպես, որ AMN և DEF եռանկյունները հավասարակողմ են: Դիցուք P–ն AN և DE հատվածների հատման կետն է, իսկ Q–ն AM և FE հատվածների հատման կետն է: Ապացուցեք, որ $PQ=FM$:

Լուծում: Քանի, որ $AD=DC, AN=DE=DF, \angle A=\angle D=\angle C=90^\circ$, հետևաբար $\triangle ADE=\triangle ADN=\triangle DCF$, որտեղից $\angle DAP=\angle ADP=\angle CDF=15^\circ$ և $AE=DN$:

$AE=DN$ և $AE\parallel DN$, որտեղից $ADNE$–ն ուղղանկյուն է, հետևաբար $DP=PE$ և $AP=PN$:



DFE հավասարակողմ եռանկյունում՝ $DP=PE$, հետևաբար $\angle DPF=90^\circ$ և $\angle DFP=\angle PFE=30^\circ$:

Նմանապես $\angle NPM=90^\circ$ և $\angle NMP=\angle PMA=30^\circ$:

$\angle DPN=30^\circ \Rightarrow \angle NPF=60^\circ \Rightarrow \angle FPM=30^\circ=\angle PMA \Rightarrow PF\parallel QM$:

$\angle PMQ=\angle PFQ=30^\circ$, հետևաբար $PFMQ$ սեղանին կարելի է արտագծել շրջանագիծ, հետևաբար $PQ=FM$: