

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ 8-րդ ԴԱՍԱՐԱՆ
ՄԱՐԶԱՅԻՆ ՓՈԻԼ 2022 թ

Տևողությունը – 180 րոպե

Խնդիր 1: Ապացուցեք, որ ցանկացած երկու a և b բնական թվերի համար տեղի ունի

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab + \frac{|a - b|}{2}$$

անհավասարությունը: Պարզել, թե ե՞րբ տեղի ունի հավասարության դեպքը:

Լուծում: $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab + \frac{|a - b|}{2} \Leftrightarrow \frac{(a - b)^2}{2} \geq \frac{|a - b|}{2} \Leftrightarrow \frac{|a - b|}{2} (|a - b| - 1) \geq 0$: Հավասարության դեպքը տեղի ունի, երբ $|a - b| = 0$ կամ $|a - b| = 1$ հետևաբար $a = b$ կամ a և b թվերը հաջորդական բնական թվեր են;

Չափանիշեր

1) $\frac{(a - b)^2}{2} \geq \frac{|a - b|}{2} + 1$ միավոր

2) $\frac{|a - b|}{2} (|a - b| - 1) \geq 0$: +2 միավոր

3) $a = b$ կամ a և b թվերը հաջորդական բնական թվեր են: +2 միավոր

Խնդիր 2: Գտնել բնական թիվը, եթե հայտնի է, որ իր երեք փոքրագույն բաժանարարների գումարը 13 է, իսկ իր երեք մեծագույն բաժանարարների գումարը՝ 329:

Լուծում: Դիցուք $1 = d_1 < d_2 < d_3$, հետևաբար $d_2 + d_3 = 12$: Քանի, որ d_2 -ը պագ թիվ է, հետևաբար $d_2 + d_3 = 12$ հավասարմանը բավարարում են (3,9) և (5,7) թվազույգերը:

Եթե d -ն N թվի բաժանարար է, ապա $\frac{N}{d}$ ևս բաժանարար է:

1) $d_2 = 3, d_3 = 9 \Rightarrow N + \frac{N}{3} + \frac{N}{9} = 329 \Leftrightarrow N \in \emptyset$:

2) $d_2 = 5, d_3 = 7 \Rightarrow N + \frac{N}{5} + \frac{N}{7} = 329 \Leftrightarrow N = 245$:

Չափանիշեր

1) d_2 -ը պագ թիվ է: +1 միավոր

2) $d_2 + d_3 = 12$ հավասարմանը բավարարում են (3,9) և (5,7) թվազույգերը: +1 միավոր

3) Եթե d -ն N թվի բաժանարար է, ապա $\frac{N}{d}$ ևս բաժանարար է: +1 միավոր

4) $d_2 = 3, d_3 = 9 \Rightarrow N + \frac{N}{3} + \frac{N}{9} = 329 \Leftrightarrow N \in \emptyset$: +1 միավոր

5) $d_2 = 5, d_3 = 7 \Rightarrow N + \frac{N}{5} + \frac{N}{7} = 329 \Leftrightarrow N = 245$: +1 միավոր

Խնդիր 3: Դիցուք ABCD զուգահեռագծի CD կողմի միջնուղղահայացը BE բարձրությունը հատում է H կետում, իսկ M-ը AB հատվածի միջնակետն է: Ապացուցեք, որ $\angle HMD = 90^\circ$:

Լուծում: Դիցուք N-ը DC կողմի միջնակետն է: Քանի որ $HN \perp CD \Rightarrow HN \perp MB$ և $BH \perp MN \Rightarrow MH \perp BN$: Քանի որ $DN = BM, DN \parallel BM$, հետևաբար BNDM-ը զուգահեռագիծ է, հետևաբար $MH \perp MD$, հետևաբար $\angle HMD = 90^\circ$:

Չափանիշեր

- 1) $HN \perp MB$ +1 միավոր
- 2) $MH \perp BN$ +2 միավոր
- 3) BNDM-ը զուգահեռագիծ է +1 միավոր
- 4) $\angle HMD = 90^\circ$ +1 միավոր

Խնդիր 4: $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ բազմությունից ընտրել են k հատ երկու տարր պարունակող ենթաբազմություն այնպես, որ ընտրված ենթաբազմություններից ցանկացած երկուսի հատումը դատարկ չէ: Գտեք k-ի հնարավոր մեծագույն արժեքը:

Լուծում: Երկու տարր պարունակող ենթաբազմությունների քանակը, որոնց տարրերից մեկը 1-ն է հավասար է 7, հետևաբար $k \geq 7$: Երկու տարր պարունակող ենթաբազմությունների քանակը հավասար է $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$: Այդ ենթաբազմությունները բաժանենք 7 քառյակների այնպես, որ յուրաքանչյուր քառյակին պատկանող ենթաբազմությունների միավորումը A-ն է, իսկ ցանկացած երկուսի հատումը դատարկ: Եթե ընտրենք $k > 7$ ենթաբազմություն, ապա կգտնվի քառյակ, որից ընտրվել է առնվազն երկու ենթաբազմություն, հետևաբար ընտրվածների մեջ կլինեն երկու ենթաբազմություն, որոնց հատումը դատարկ է, հետևաբար $k = 7$:

Չափանիշեր

- 1) $k \geq 7$ +2 միավոր
- 2) $k = 7$: +3 միավոր