

Մաթեմատիկայի օլիմպիադա, 2021թ.,  
Հանրապետական փուլ - Տևողությունը 150 րոպե  
7-րդ դասարան

1. Հաշվել գումարը.  $\frac{1+2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{2+3}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{3+4}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19+20}{19^2 \cdot 20^2} + \frac{20+21}{20^2 \cdot 21^2}$ :

**Լուծում:** Նկատենք, որ յուրաքանչյուր գումարելին ունի  $\frac{k+(k+1)}{k^2 \cdot (k+1)^2}$  տեսքը:

Այն ձևափոխենք հետևյալ կերպ.  $\frac{k+(k+1)}{k^2 \cdot (k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2 \cdot (k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2 \cdot (k+1)^2} =$   
 $\frac{(k+1)^2}{k^2 \cdot (k+1)^2} - \frac{k^2}{k^2 \cdot (k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$ :

Այն կիրառելով յուրաքանչյուր գումարելիի նկատմամբ, կստանանք.

$$\begin{aligned} & \frac{1+2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{2+3}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{3+4}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19+20}{19^2 \cdot 20^2} + \frac{20+21}{20^2 \cdot 21^2} = \\ & \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{19^2} - \frac{1}{20^2} + \frac{1}{20^2} - \frac{1}{21^2} = \\ & = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{21^2} = \frac{440}{441} \end{aligned}$$

Պատ.՝  $\frac{440}{441}$

2. Քառակուսու յուրաքանչյուր գագաթում գրված է մեկ բնական թիվ, իսկ յուրաքանչյուր կողմի վրա՝ այդ կողմի ծայրակետերում գրված թվերի արտադրյալը: Կողմերի վրա գրված թվերի գումարը հավասար է 2021-ի: Գտնել քառակուսու գագաթներում գրված թվերի գումարը:

**Լուծում:** Եթե քառակուսու գագաթներում գրված թվերը նշանակենք՝  $a, b, c, d$ , ապա կողմերի վրա՝ գրված թվեր կլինեն՝  $ab, bc, cd, ad$ :

Ըստ խնդրի պայմանի կունենանք.  $ab + bc + cd + ad = 2021$ :

Այն նեկայացնենք  $(a + c)(b + d) = 2021$  տեսքով և նկատենք, որ  $2021 = 43 \cdot 47$ :

Հետո բար կամ  $a + c = 43$  և  $b + d = 47$ , կամ  $a + c = 47$  և  $b + d = 43$ :

Երկու դեպքում էլ, կունենանք՝  $a + b + c + d = 43 + 47 = 90$ :

Պատ.՝ 90

3. Ֆուտբոլասերների խմբում, որում կան ճշտախոսներ և ստախոսներ (ճշտախոսները միշտ ճիշտն են ասում, ստախոսները միշտ խաբում են), յուրաքանչյուրը երկրպագում է Ա, Բ, Գ, Դ թիմերից միայն մեկին: Երբ հարցրեցին, թե ովքեր են երկրպագում Ա թիմին, դրական պատասխանեցին խմբի անդամների 50%-ը, Բ թիմին՝ 43%-ը, Գ թիմին՝ 35%-ը, և Դ թիմին՝ 0%-ը: Իրականում խմբի անդամների քանի՞ %-ն է երկրպագում թիմերից յուրաքանչյուրին:

**Լուծում:** Նկատենք, որ ճշտախոսը չորս հարցերից միայն մեկին է դրական պատասխանել, իսկ ստախոսը՝ երեքին:

Քանի որ Դ թիմի դեպքում բոլորը բացասական են պատասխանել, ապա ոչ մի ճշտախոս Դ թիմին չի երկրպագում, իսկ բոլոր ստախոսները երկրպագում են Դ թիմին:

Հետևաբար՝ Ա, Բ և Գ թիմերից յուրաքանչյուրի դեպքում տրված հարցի դրական պատասխան են տվել այդ թիմի և Դ թիմի երկրպագուները:

Ուստի՝ եթե յուրաքանչյուր թիմի երկրպագուների %-ը նշանակենք թիմի անվանը համապատասխան տառով, ապա կունենանք.

$$A+D=50\%$$

$$B+D=43\%$$

$$G+D=35\%$$

Գումարելով իրար այս հավասարությունները՝ կստանանք.  $(A+B+G+D)+D=128\%$ :

Հաշվի առնելով, որ  $A+B+G+D=100\%$ , կստանանք, որ Դ թիմին երկրպագում է 14%-ը, Ա թիմին՝ 36%-ը, Բ թիմին՝ 29%-ը, Գ թիմին՝ 21%-ը:

**Պատ.**՝ Ա-ին՝ 36%-ը, Բ-ին՝ 29%-ը, Գ-ին՝ 21%-ը, Դ-ին՝ 14%-ը:

4. Գումարել են եռանիշ թվի բոլոր թվանշանները և ստացել A թիվը: Դիցուք B-ն՝ A թվի թվանշանների գումարն է, իսկ C-ն՝ B թվի թվանշանների գումարը (միանիշ թվի «թվանշանների գումար» համարվում է այդ միանիշ թիվը): Գտնել այն եռանիշ թվերի քանակը, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում B և C թվերը տարբեր են:

**ԼՈՒԾՈՒՄ:** Քանի որ եռանիշ թվի թվանշանների գումարը՝ A կարող է լինել 1-ից մինչև 27 թվերից որևէ մեկը, հետևաբար B-ն կարող է լինել 1-ից մինչև 10-ը թվերից մեկը:

B-ն հավասար է 1-ից մինչև 9 թվերի դեպքում B և C թվերը կլինեն հավասար: Հետևաբար B=10, որը տեղի ունի միայն A=19-ի դեպքում:

Հաշվի առնելով այն, որ եռանիշ թվի թվանշանների գումարը կլինի 19, եթե նրա թվանշաններից գոնե մեկը 7, 8 կամ 9 է, ապա կունենանք եռանիշ թվի թվանշանների հետևյալ տարբերակները.  $(7, 6, 6)$ ,  $(7, 7, 5)$ ,  $(7, 8, 4)$ ,  $(7, 9, 3)$ ,  $(8, 6, 5)$ ,  $(8, 8, 3)$ ,  $(8, 9, 2)$ ,  $(9, 9, 1)$ ,  $(9, 6, 4)$ ,  $(9, 5, 5)$ :

Հաշվի առնելով այն, որ կրկնվող թվանշան պարունակող յուրաքանչյուր եռանիշ թվի կազմվում է 3 եռանիշ թիվ, իսկ չկրկնվող թվանշանների յուրաքանչյուր եռանիշ թիվ, ապա բոլոր եռանիշ թվերի քանակը կլինի.  $5 \cdot 3 + 5 \cdot 6 = 45$