Մաթեմատիկայի հանրապետական օլիմպիադա

22 մարտի 2019

7-րդ դասարան, տևողությունը՝ 150 ր

1. Տրված են երեք ոչ ամբողջ a, b, c թվեր, որոնցից ցանկացած երկուսի գումարը ամբողջ թիվ է: Կարո՞ղ է արդյոք $ab+ac+bc$ արտահայտության արժեքը լինել ամբողջ:

Լուծում: Քանի, որ $a+c, a+b \in Z \Rightarrow 2a+b+c \in Z$: Քանի, որ $b+c \in Z \Rightarrow 2a \in Z$, հետևաբար

$2a \in Z \Rightarrow a = \dfrac{2k+1}{2}$: Նմանապես $b = \dfrac{2m+1}{2}, c = \dfrac{2n+1}{2}$, հետևաբար

$ab+ac+bc = \dfrac{(2n+1)(2m+1)+(2n+1)(2k+1)+(2k+1)(2m+1)}{4}$ ամբողջ չէ քանի, որ կոտորակի համարիչում կենտ թիվ է, իսկ հայտարարում՝ զույգ:

2. 1, 2, 3, ..., 299, 300 բնական թվերից յուրաքանչյուրը ներկել են կարմիր, կապույտ, կանաչ գույներից որևէ մեկով: Հայտնի է, որ ցանկացած երկու տարբեր գույնի թվերի գումարը կարմիր գույնի է: Ապացուցեք, որ հնարավոր չէ այդ թվերից 100-ը ներկված լինի կարմիր, 100 -ը՝ կապույտ և 100 –ը կանաչ:

Լուծում: Եթե 1-ը կարմիր է, իսկ a-ն ոչ կարմիր, ապա a+1 թիվը կարմիր է , հետևաբար կարմիր թվերի քանակը փոքր չէ կապուտ և կանաչ թվերի քանակից միասին վերցրած:

Եթե 1-ը կանաչ է, իսկ a-ն կարմիր է կամ կապույտ, ապա a+1 թիվը կարմիր է : Այդ դեպքում առաջին կապույտ թվից մեծ բոլոր թվերը կարմիր են, հետևաբար կապուտ թվերի քանակը չի գերազանցում 1-ը:

Նմանապես, երբ 1-ը կապույտ է:

3. Գրատախտակին գրված են 1, 2, 3, ..., 2018, 2019 թվերը: Յուրաքանչյուր քայլում թույլատրվում է գրատախտակին գրված ցանկացած թվին գումարել նրա առաջին կամ վերջին թվանշանը, և ստացված թիվը ավելացնել գրատախտակին: Գտեք փոքրագույն բնական թիվը, որը չի կարող հայտնվել գրատախտակին:

Լուծում: $a \rightarrow b$ գրառումը նշանակում է, որ a–ից կարելի է ստանալ b–ն:

$2018 \rightarrow 2020 \rightarrow \cdots \rightarrow 2998 \rightarrow 3000$

$2019 \rightarrow 2021 \rightarrow \cdots \rightarrow 2999 \rightarrow 3001$

$3000 \rightarrow 3003 \rightarrow \cdots \rightarrow 3999 \rightarrow 4002$

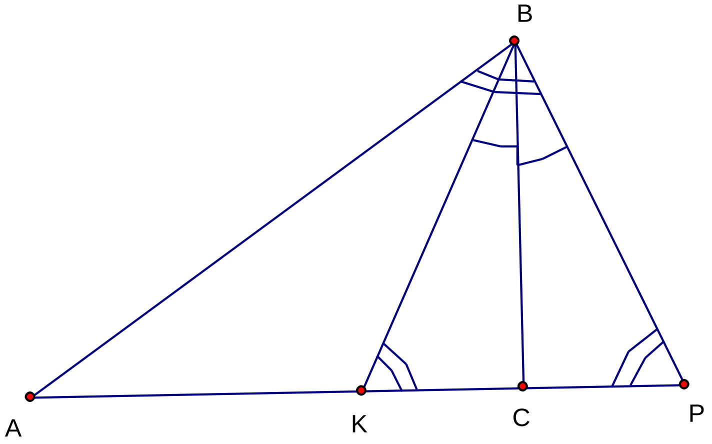
$3001 \rightarrow 3004 \rightarrow \cdots \rightarrow 3997 \rightarrow 4000$

$3001 \rightarrow 3002 \rightarrow 3005 \rightarrow \cdots \rightarrow 3998 \rightarrow 4001$

4003-ը չի կարող հայտնվել գրատախտակին քանի, որ թվին գումարելով իր վերջին թվանշանը կստացվի զույգ թիվ, իսկ 3999+3=4002<4003, 4000+4=4004>4003:

4. Տրված է C ուղիղ անկյունով այնպիսի ABC եռանկյունը, որի AB և AC կողմերի վրա համապատասխանաբար D և K կետերը վերցված են այնպես, որ $BD = AC$ և $KC = AD$: Ապացուցել, որ $\angle BAC = 2 \cdot \angle CBK$:

Լուծում 1:

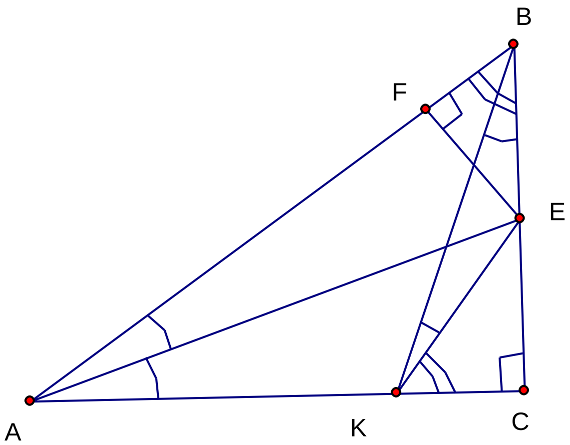


Դիցուք P –ն K –ի համաչափն է C կետի նկատմամբ: Այդ դեպքում
$AP = AC + CP = BD + AD = AB$

և $BK = BP$, որտեղից $\angle ABP = \angle APB = \angle BKP = \alpha$,

հետևաբար $\angle BAC = 180^{\circ} - 2\alpha = 2\left(90^{\circ} - \alpha\right) = 2\angle CBK$:

Լուծում 2: Տանենք AE կիսորդը: Դիցուք $EF \perp AB$, հետևաբար $EC = EF$ և $AC = AF$, որտեղից՝ $BF = KC$:



$\Delta EKC = \Delta BFE$, որտեղից $BE = KE$, հետևաբար $\angle KBE = \angle EKB$ և $\angle EKC = \angle FBE$:

Այդ դեպքում $\angle BAC = \angle BKC - \angle ABK = \angle BKE + \angle EKC - (\angle ABC - \angle KBE) = 2\angle BKE$;

Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է առավելագույնը 7 միավոր