XI-XII դասարան

Խնդիր 1: Գտնել p-ի հնարավոր փոքրագույն արժեքը, որի դեպքում $x^5 - px + q$ բազմանդամն ինչ-որ q թվի դեպքում ունենա ճիշտ երկու հատ իրարից տարբեր բնական արմատներ:

Լուծում: Ենթադրենք, որ $x^5 - px + q = 0$ հավասարումը ունի $a \neq b$ բնական արմատներ: Այդ դեպքում $a^5 - pa + q = 0$ և $b^5 - pb + q = 0$, որտեղից $(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 - p) = 0 \Longrightarrow a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 = p \geq 31$, երբ $a = 1, b = 2 \Longrightarrow$q=30:

$x^5 - 31x + 30 = (x^2 - 3x + 2)(x^3 + 3x^2 + 7x + 15)$ հավասարման բնական լուծումներն են 1,2 թվերը քանի, որ $Q(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 15$ բազմանդամը բնական արմատ չունի:

Խնդիր 2: Դիցուք տրված է $S \subset \{0, 1, 2, ..., 2020\}$ բազմությունը, ընդ որում $|S| > 1515$: Ապացուցել, որ կգտնվեն a, b, c բնական թվեր, որոնց համար

$$a, b, c, a+b, b+c, c+a, a+b+c$$

թվերը 2021-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդները պատկանում են S-ին:

Ծանոթություն: $|X|$-ը X բազմության էլեմենտների քանակն է:

Առաջին լուծում: Վերցնենք $a = b = c$: Կստացվի անհրաժեշտ է հետևյալ 7 թվերը 2021-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդները պատկանեն S բազմությանը. $a, a, a, a+a, a+a, a+a, a+a+a$, այն որ նույնն է a, 2a, 3a թվերի 2021-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդները պատկանեն S բազմությանը: Կառուցենք 2021 տողով և 3 սյունով աղյուսակ, որի առաջին սյունում գրենք $0, 1, 2, \dots, 2020$ թվերը, իսկ 2-րդ և 3-րդ սյուներով գրենք համապատասխանաբար 1-ին սյան արժեքների կրկնապատիկների և եռապատիկների 2021-ի վրա բաժանելիս ստացվող մնացորդները.

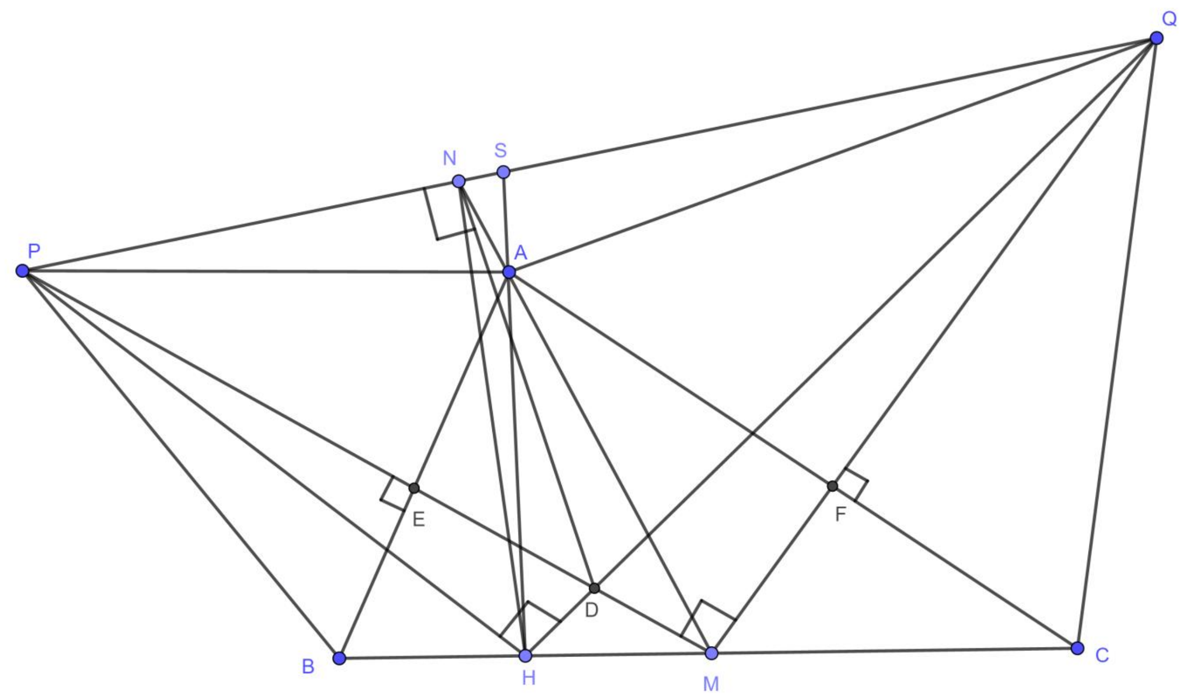
a	*2a*	*3a*
0	*0*	*0*
1	*2*	*3*
2	*4*	*6*
…	…	…
2020	*2019*	*2018*

Նկատենք, որ 2-րդ և 3-րդ սյուները պարունակում են $0, 1, 2, \dots, 2020$ բոլոր թվերը ինչ-որ հերթականությամբ, քանի որ 2-ը և 3-ը 2021-ի հետ փոխադարձաբար պարզ են: Աղյուսակից ջնջենք բոլոր տողերը, որոնցում կա որևէ թիվ S-ից դուրս: $|S| > 1515$, ապա ամեն սյունից կլինեն առավելագույնը 505 թիվ, որ S բազմությանը չեն պատկանում: Ստացվում է, որ կջնջվեն առավելագույնը 1515 տող: Մնացած բոլոր տողերի համար 3 թվերն էլ պատկանում են S բազմությանը, հակառակ դեպքում կջնջվեին: Քանի որ սկզբում աղյուսակում կար 2021 տող և ջնջվել են 1515-ը, ապա մնացած բոլոր տողերի համար առաջին սյան թիվը վերցնելով որպես a կստանանք պահանջված եռյակը(հաշվի առնելով $a = b = c$):

Երկրորդ լուծում:

Նշանակենք $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 2020\}$: Վերցնենք ցանկացած d թիվ S բազությունից: $a \in \Omega$ յուրաքանչյուր թվի համար գտնենք $b \in \Omega$ թիվ, որ $a + b$ թիվը 2021-ի բաժանելիս տալիս է d մնացորդ: Պարզ է, որ յուրաքանչյուր a-ի համար գոյություն ունի համապատասխան b-ն, և այդ b-ին համապատասխանող զույգը a-ն է:

Խնդիր 3: Դիցուք AH-ը և AM-ը A ուղիղ անկյունով ABC ուղղանկյուն եռանկյան համապատասխանաբար բարձրությունն ու միջնագիծն են: Դիցուք AB և AC կողմերիը որպես հիմք ընդունելով կառուցված են ABP և ACQ հավասարասրուն եռանկյուններն այնպես, որ $\angle APB = \angle AQC$ և եռանկյունները ABC եռանկյան հետ ընդհանուր տիրույթ չունեն: Դիցուք MA ուղիղը PQ հատվածը հատում է N կետում: Ապացուցել, որ $\angle NHP = \angle AHQ$:



Առաջին լուծում: $tg\angle B = \frac{AH}{BH} = \frac{AC}{AB} = \frac{AQ}{AP}$ և $\angle HAQ = \angle QAC + \angle CAH = \angle PBA + \angle ABH = \angle PBH \Longrightarrow$ $\Delta PBH \sim \Delta AHQ \Longrightarrow \angle AHQ = \angle PHB \Longrightarrow \angle PHQ = 90 = \angle PMQ$, հետևաբար P,H,M,Q կետերով անցնում է շրջանագիծ, որտեղից $\angle QPH = \angle QMC = \angle AMQ$:

Դիցուք PM և QH ուղիղները հատվում են D կետում: Այդ դեպքում $\angle MNQ = \angle NPM + \angle PMN = \angle QHM + \angle HMD = \angle QDM$, հետևաբար N,D,M,Q կետերով անցնում է շրջանագիծ,հետևաբար $\angle DNQ = 90^0$, հետևաբար N,D,H,P կետերով անցնում է շրջանագիծ, որտեղից $\angle PNH = \angle PDH = \angle MDQ = \angle MNQ$, հետևաբար PN–ը NHM եռանկյան արտաքին անկյան կիսորդն է, իսկ PM -ը՝ ներքին անկյան կիսորդն ՝է, հետևաբար PH–ը NHM եռանկյան արտաքին անկյան կիսորդն է, որտեղից՝ $\angle PHB = \angle PHN = \angle AHQ$:

Երկրորդ լուծում:

Լեմմա: ABC եռանկյան AC կողմի վրա տրված ենM,N կետեր : Այդ դեպքում՝

$\angle ABM = \angle CBN \Leftrightarrow \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AM}{MC}\frac{AN}{NC}$:

Դիցուք AH և PQ ուղիղները հատվում են S կետում:

Ըստ լեմմայի՝ $\angle PHN = \angle AMQ \rightleftarrows \frac{PH^2}{HQ^2} = \frac{PN}{NQ}\frac{PS}{SQ}$: Քանի, որ : $tg\angle B = \frac{AH}{BH} = \frac{AC}{AB} = \frac{AQ}{AP} = k$ և $\angle HAQ = \angle QAC + \angle CAH = \angle PBA + \angle ABH = \angle PBH \Longrightarrow$ ΔPBH~ΔAHQ $\Longrightarrow k = \frac{QH}{PH}$:

Քանի, որ $\angle SAQ = 180^0 - \angle QAC - \angle CAH$=$180^0$- $\angle PAB - \angle BAM = \angle NAP$ $\Leftrightarrow$ $\frac{PH^2}{HQ^2} = \frac{PA^2}{AQ^2} = \frac{PN}{NQ}\frac{PS}{SQ}$: