Խնդիր 4: Դիցուք սեղանին դրված են 2n հատ քարտեր: Քարտերից մեկի վրա գրված է 1, երկրորդի վրա գրված է 2, երրորդի վրա գրված է 3 և այդպես շարունակ վերջինի վրա գրված է 2n: Հովհաննեսն ու Նարեն խաղում են հետևյալ խաղը. յուրաքանչյուր քայլի սկզբում Հովհաննեսը, իսկ հետո Նարեն (Նարեն տեսնում է Հովհաննեսի ընտրած քարտը) ընտրում են մեկական քարտեր և գրատախտակին գրում են այդ երկու քարտերի վրա գրված թվերի գումարը: Այդպիսի n հատ քայլերից հետո քարտերն ավարտվում են, որից հետո հաշվում են գրատախտակին գրված n թվերի արտադրյալը: Եթե այդ արտադրյալը բնական թվի քառակուսի է, ապա հաղթում է Հովհաննեսը, իսկ հակառակ դեպքում հաղթում է Նարեն: Պարզել, թե խաղացողներից ո՞ր մեկն ունի հաղթական մարտավարություն:

Լուծում: Դիտարկենք երեք տարբեր դեպքեր:

Դեպք 1: $2n = 6k$: 1-ից մինչև 6k թվերը տրոհենք հետևյալ թվազույգերի

$$(1,2),\quad (3,4),\quad (5,6),$$

$$(7,12),\qquad (8,11),(9,10),\dots,(6k-5,6k),(6k-4,6k-1),(6k-3,6k-2)$$

Դեպք 2: $2n = 6k + 2$: 1-ից մինչև 6k+2 թվերը տրոհենք հետևյալ թվազույգերի

$$(1,2),\quad (3,4),\quad (5,6),$$

$$(7,12),\qquad (8,11),(9,10),\dots,(6k-11,6k-6),(6k-10,6k-7),(6k-9,6k-8),$$

$$(6k-5,6k),(6k-4,6k-1),(6k-3,6k+2),(6k+1,6k-2)$$

Դեպք 3: $2n = 6k + 4$: 1-ից մինչև 6k+4 թվերը տրոհենք հետևյալ թվազույգերի

$$(1,2),\quad (3,4),\quad (5,6),$$

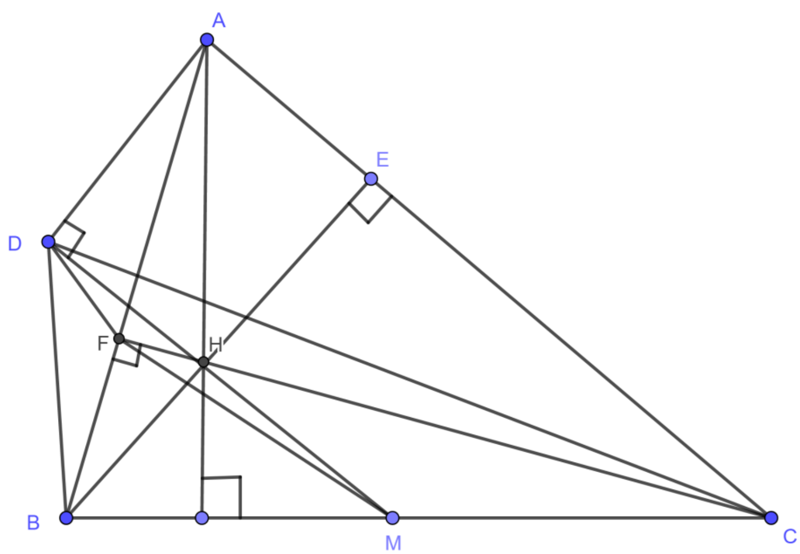
$$(7,12),\qquad (8,11),(9,10),\dots,(6k-11,6k-6),(6k-10,6k-7),(6k-9,6k-8),$$

$$(6k-5,6k),(6k-4,6k-1),(6k-3,6k+2),(6k+1,6k-2),(6k+3,6k+4):$$

Ամեն անգամ երբ Հովհաննեսն ընտրում է որևէ թիվ, Նարեն ընտրում է այդ թվազույգի մյուս թիվը: Այդ դեպքում գրատախտակին գրված թվերից միայն 1+2=3 թիվը կբաժանվի 3-ի, բայց այն չի բաժանվի 9-ի: Հետևաբար բոլոր թվերի արտադրյալը պարզ արտադրիչների վերլուծելիս 3-ի ցուցիչը կլինի 1, ուստի այն թվի աստիճան չէ:

Խնդիր 5: Դիցուք ABC սուրանկյուն եռանկյան BE և CF բարձրությունները հատվում են H կետում, իսկ M–ը BC կողմի միջնակետն է: Դիցուք D–ն A կետից MH ուղղին տարված ուղղահայացի հիմքն է: Ապացուցել, որ DBH և DCH անկյունների կիսորդները և MH ուղիղը հատվում են մեկ կետում:

Լուծում:



Քանի, որ $\angle FDM = \angle FDH = \angle FAH = \angle FCM$, հետևաբար D,F,M,C կետերով անցնում է շրջանագիծ, որտեղից $\varDelta FHM \sim \varDelta DHC$, հետևաբար $\frac{FM}{CD} = \frac{HM}{HC} \Longrightarrow \frac{DC}{CH} = \frac{FM}{HM}$(1)

Նմանապես՝ $\frac{BD}{BH} = \frac{EM}{HM}$(2): (1) և (2) $\Longrightarrow$՝ $\frac{BD}{BH} = \frac{CD}{CH}$:

Դիցուք DBH և DCH անկյունների կիսորդները ուղիղը հատում են համապատասխանաբար R և T կետերում: Այդ դեպքում՝ $\frac{DR}{RH} = \frac{BD}{BH} = \frac{CD}{CH} = \frac{DT}{TH}$, հետևաբար R և T կետերը համընկնում են:

Խնդիր 6: Դիցուք տրված է n բնական թիվը: Գտնել $a_0, a_1, \dots, a_n$ հաջորդականությունների քանակը, որի բոլոր էլեմենտները $\{0,1,2,3\}$ բազմությունից են և բավարարում են

$$n = a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + \dots + 2^n a_n$$

հավասարությանը:

Լուծում: $f(n)$-ով նշանակենք խնդրի պատասխանը n-ի համար: Քանի որ $2a_1 + 2^2 a_2 + \dots + 2^n a_n$-ը զույգ է, ապա n-ը և a_0-ն ունեն նույն զույգությունը: Ցանկացած $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ հաջորդականության համար, որը բավարարում է խնդրի պայմանին $2n$ համար, $a_0 + 1, a_1, \dots, a_{2n}, 0$ հաջորդականությունը բավարարում է խնդրի պայմանին $2n + 1$-ի համար և հակառակը: Քանի որ $2^{2n+1} > 2n + 1$, ապա հաջորդականության $2n + 1$-րդ կլինի 0: Ստացվեց, որ $f(2n) = f(2n + 1)$:

Դիտարկենք 2 դեպք $2n$ թվի համար. $a_0 = 0$ կամ $a_0 = 2$:

Առաջին դեպքում կստացվի $2n = 0 + 2a_1 + \dots + 2^{2n} a_{2n}$, հետևաբար $n = a_1 + \dots + 2^{2n-1} a_{2n}$: Քանի որ $n < 2^{n+1}$, ստացվում է $a_{n+1} = \dots = a_{2n} = 0$: Կարելի է նշված կերպ համապատասխանեցում կազմել n-ի բոլոր ներկայացումների և $2n$-ի բոլոր $a_0 = 0$ ներկայացումների միջև: Ուրեմն այս դեպքում քանակը հավասար է $f(n)$: Նույն կերպ երկրորդ դեպքում $2n = 2 + 2a_1 + \dots + 2^{2n} a_{2n}$, ապա $n - 1 = a_1 + \dots + 2^{2n-1} a_{2n}$: Նման ձևով կստանանք այս քանակը $f(n-1)$: Արդյունքում ստացվեց, որ $f(2n) = f(n) + f(n-1)$:

Հեշտ է ստուգել, որ $f(1) = 1$: Ապացուցենք, որ $f(2n) = n + 1$ ցանկացած n բնական թվի համար ինդուկցիայի միջոցով: Նախ ստուգենք $n = 1$ համար: Ենթադրելով ապացուցված է մինչև $n - 1$ բնական թվերի համար, ապացուցենք n-ի համար: Եթե n-ը զույգ է՝ $2k$, ապա $f(2n) = f(n) + f(n-1) = f(2k) + f(2k-1) = f(2k) + f(2k-2) = k + 1 + k = 2k + 1 = n + 1$: Նույն կերպ երբ n-ը կենտ է՝ $2k - 1$: $f(2n) = f(n) + f(n-1) = f(2k-1) + f(2k-2) = f(2k-2) + f(2k-2) = k + k = 2k = n + 1$: Օգտվելով $f(2n) = f(2n+1)$-ից և $f(1) = 1$-ից պատասխանը կստացվի $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$: