Մաթեմատիկայի հանրապետական օլիմպիադա

22 մարտի 2019

11-12-րդ դասարաններ – առաջին օր

1) Դիցուք x, y, z, a, b, c թվերը 6-ը չգերազանցող և զույգ առ զույգ իրարից տարբեր բնական թվեր են: Գտնել $xyz + abc - ax - by - cz$ արտահայտության հնարավոր փոքրագույն արժեքը:

Լուծում:

1) $A = xyz + abc \geq 2\sqrt{xyzabc} = 2\sqrt{720} > 52$:

2) $A = 53 \Rightarrow xyz + abc = 2\cdot4\cdot6 + 1\cdot3\cdot5 = 63 \Rightarrow A \neq 53$:

3) $A = 54 \Rightarrow xyz + abc = 1\cdot4\cdot6 + 2\cdot3\cdot5 = 54$:

4) $a > b, x > y \Rightarrow ax + by > ay + bx \Leftrightarrow (a-b)(x-y) > 0$:

5) $\max\{ax + by + cz\} = 6\cdot5 + 4\cdot3 + 2\cdot1 = 44$, ուստի

$\min\{xyz + abc - ax - by - cz\} = 10$, երբ $x = 6, y = 4, z = 2, a = 5, b = 3, c = 1$:

2) Դիցուք E-ն $ABCD$ ($\angle A = \angle B = 90^o$) ուղղանկյուն սեղանի CD կողմի վրա նշված որևէ կետ է: Դիցուք ABE եռանկյանը ներգծած ω շրջանագիծը AB, AE և BE կողմերը շոշափում է համապատասխանաբար P, F, K կետերում: Դիցուք KF ուղիղը BC և AD հատվածները հատում է համապատասխանաբար M և N կետերում, իսկ PM−ը և PN-ը ω−ն հատում են համապատասխանաբար H և T կետերում: Ապացուցել, որ $PH = PT$:

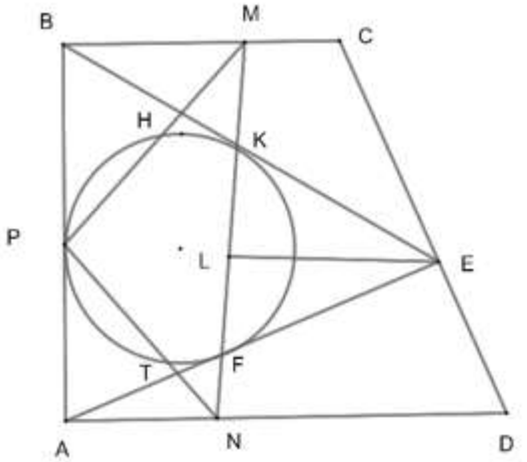
Լուծում: Դիցուք $L \in MN$ այնպես, որ $EL \parallel BC \parallel AD$:

Այդ դեպքում $\Delta BMK \sim \Delta KEL$, ուստի $\frac{BM}{LE} = \frac{BK}{KE}$: (1)

Նմանապես՝ $\Delta AFN \sim \Delta FEL$, ուստի $\frac{AN}{LE} = \frac{AF}{FE}$: (2)

(1)-ից և (2)-ից $\Rightarrow \frac{BM}{AN} = \frac{BK}{AF} \Rightarrow \frac{BM}{AN} = \frac{BP}{AP}$ և

$\angle A = \angle B \Rightarrow \triangle BPM \sim \triangle APN \Rightarrow \angle APT = \angle BPH \Rightarrow \cup PH = \cup PT \Rightarrow PH = PT$:



3. Մաթեմատիկայի օլիմպիադային մասնակցում է N աշակերտ, ընդ որում աշակերտների ցանկացած եռյակում կա իրար անծանոթ զույգ: Հայտնի է, որ ցանկացած աշակերտ ճանաչում է ամենաշատը k աշակերտի: Հայտնի է նաև, որ ցանկացած $1 \leq s \leq k$ թվի համար գոյություն ունի գոնե մեկ աշակերտ, ով ճանաչում է ճիշտ s աշակերտի: Գտնել k–ի հնարավոր մեծագույն արժեքը:

<u>ԾԱՆՈԹԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆ</u>. եթե A աշակերտը ծանոթ է B աշակերտին, ապա B աշակերտը ծանոթ է A աշակերտին:

Լուծում: Դիցուք $\max\{p\}=k$: Ենթադրենք A_{k+1} աշակերտը ծանոթ է $A_1, A_2, \cdots, A_k$ աշակերտներին: Քանի, որ $A_{k+1}, A_i, A_j\,(1 \leq i, j \leq k)$ աշակերտների կամայական եռյակում A_i և A_j աշակերտները ծանոթ չեն, ապա կամայական $A_i\,(1 \leq i \leq k)$ աշակերտ ծանոթ է ամենաշատը $n-k$ աշակերտի:

Այդ դեպքում $A_{k+1}, A_{k+2}, \cdots, A_n$ աշակերտներից յուրաքանչյուրը պետք է ծանոթ լինի $n+1-k, n+2-k, \cdots, k$ թվերից որևէ մեկ քանակությամբ աշակերտների:

Հետևաբար $n-(k+1)+1 \geq k-(n+1-k)+1$, որտեղից ՝ $k \leq \frac{2}{3}n$, հետևաբար $k=\left[\frac{2}{3}n\right]$:

Երբ $n=3l$ կամ $n=3l+1$, ապա $k=2l$:

Նկարագրենք $k=2l$ դեպքը:

$A_{2l+1} \to A_1, A_2, \cdots, A_{2l}$
$A_{2l+2} \to A_2, A_3, \cdots, A_{2l}$
$A_{2l+3} \to A_3, A_4, \cdots, A_{2l}$
………………………
$A_{3l} \to A_l, A_{101}, \cdots, A_{2l}$

Այս դեպքում $A_1, A_2, \cdots, A_l$ աշակերտները ծանոթ են համապատասխանաբար $1, 2, \cdots, l$ աշակերտների, իսկ $A_{2l+1}, A_{2l+2}, \cdots, A_{3l}$ աշակերտները ծանոթ են համապատասխանաբար $2l, 2l-1, \cdots, l+1$ աշակերտների

Երբ $n=3l+2$, ապա $k=2l+1$:

Նկարագրենք $k=2l+1$ դեպքը:

$A_{2l+2} \to A_1, A_2, \cdots, A_{2l+1}$
$A_{2l+3} \to A_2, A_3, \cdots, A_{2l+1}$
$A_{2l+4} \to A_3, A_4, \cdots, A_{2l+1}$
………………………
$A_{3l+1} \to A_l, A_{101}, \cdots, A_{2l+1}$

Այս դեպքում $A_1, A_2, \cdots, A_{l+1}$ աշակերտները ծանոթ են համապատասխանաբար $1, 2, \cdots, l+1$ աշակերտների, իսկ $A_{2l+2}, A_{2l+3}, \cdots, A_{3l+1}$ աշակերտները ծանոթ են համապատասխանաբար $2l+1, 2l, \cdots, l+2$ աշակերտների: