Մաթեմատիկայի հանրապետական օլիմպիադա
23 մարտի 2019

11-12-րդ դասարան – երկրորդ օր

4) $k>1$–ի որ արժեքների դեպքում գոյություն ունեն k հատ հաջորդական բնական թվեր այնպես, որ նրանց գումարի և արտադրյալի վերջին երկու թվանշանները համընկնում են:

Լուծում: k հատ հաջորդական բնական թվերի գումարը նշանակենք A –ով, իսկ արտադրյալը՝ B -ով:

Երբ $k=2l+1$, ապա խնդրի պայմաններին բավարարում է $100^p-l,\cdots,100^p-1,100^p,100^p+1,\cdots,100^p+l(p>l)$ հաջորդականությունը:

Երբ $k=2$, ապա B–ն զույգ է, իսկ A–ն կենտ:

Երբ $k=2l(l>1)$: Այդ դեպքում $B\vdots 4\Rightarrow A=l\left(2n+2l-1\right)\vdots 4\Rightarrow l=4p\Rightarrow k=8p$:

Երբ $p=8$, ապա խնդրի պայմաններին բավարարում է 9,10,11,12,13,14,15,16 հաջորդականությունը

Երբ $p>1$, ապա խնդրի պայմաններին բավարարում է $2a-4p+1,\cdots,2a-1,2a,2a+1,\cdots,2a+4p$ հաջորդականությունը, որտեղ a–ն որոշվում է $25^m=2a+2a+1(m>4p)$ հավասարությամբ:

Նշված հաջորդականությունը բավարարում է խնդրի պայմաններին քանի, որ $A=\sum_{i=1}^{4p}\left(\left(2a-i+1\right)+\left(2a+i\right)\right)=4p\cdot 25^m$, որի վերջին երկու թվանշաններն են 00, իսկ $B\vdots 4$ և $B\vdots 25$, հետևաբար B–ի վերջին երկու թվանշանները ևս 00-ն է:

5) Դիցուք $1=a_1<a_2<\cdots<a_k=a$ թվերը a բնական թվի բաժանարարներն են, իսկ $1=b_1<b_2<\cdots<b_l=b$ թվերը b բնական թվի բաժանարարներն են: Գտեք a և b թվերը, եթե հայտնի է, որ $a_{2018}+b_{2018}=a$ և $a_{2019}+b_{2019}=b$:

Լուծում: Խնդրի պայմանից ակնհայտ է, որ $a<b$: Քանի, որ $a_{2018}\leq\frac{a}{2}$, ուստի $b_{2018}\geq\frac{a}{2}$:

Նմանապես $b_{2019}\leq\frac{b}{2}\leq a_{2019}$: Այստեղից նաև ստանում ենք, որ $b\leq 2a_{2019}\leq 2a$:

Քանի որ $a_{2019}\geq\frac{b}{2}>\frac{a}{2}$, ուստի $a_{2019}=a$: Նաև նկատենք, որ $b_{2018}\geq\frac{a}{2}\geq\frac{b}{4}$, որտեղից հետևում է, որ $b_{2018}=b/4$ կամ $b_{2018}=b/3$:

Եթե լինի $b_{2019} = b/3$, ապա $a_{2019} = \frac{2b}{3} = a \vdots 2 \Rightarrow a_{2018} = \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \Rightarrow b_{2018} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = b_{2019}$, ինչն անհնար է: Հետևաբար $b_{2019} = \frac{b}{2}$ ու ստացվում է $a = b - b_{2019} = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 2a$:

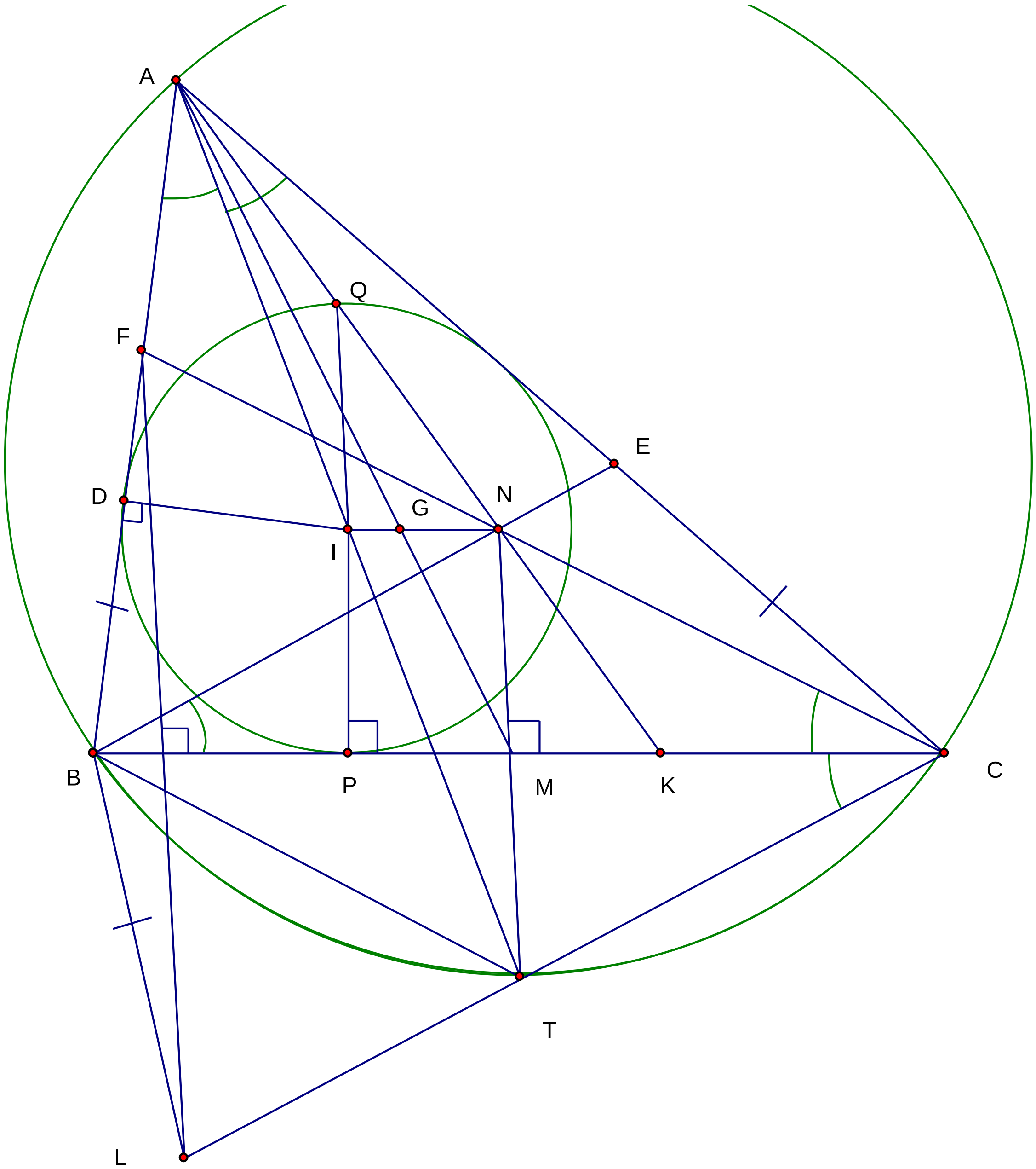
Քանի որ a-ն ունի ճիշտ 2019 բաժանարար, հետևաբար $a = p^{2018}$ կամ $a = p^2\, q^{672}$ տեսքի է, ընդ որում իր կրկնակի թիվը (b-ն) ունի ճիշտ 2020 հատ բաժանարար, ինչը հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ $a = 2^{2018}$: Ստուգումը ցույց է տալիս, որ այն բավարարում է խնդրի պայմանին:

6) ABC $(AB \neq AC)$ եռանկյան առներգծյալ շրջանագծերը եռանկյան AB և AC կողմերը շոշափում են համապատասխանաբար F և E կետերում: Դիցուք BE և CF ուղիղները հատվում են N կետում: Հայտնի է, որ N կետի համաչափը BC ուղղի նկատմամբ պատկանում է ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծին: Ապացուցեք, որ $AB + AC = 2BC$:

Ծանոթագրություն. Եռանկյան կողմը և մյուս երկու կողմերի շարունակությունները շոշափող շրջանագիծը կոչվում է առներգծյալ շրջանագիծ:

Լուծում: Դիցուք T կետը N կետի համաչափն է BC ուղղի նկատմամբ, իսկ M –ը NT հատվածի միջնակետն է: Այդ դեպքում $\angle FAE + \angle FNE = \angle FAE + \angle BNC =$

$= \angle FAE + \angle BTC = 180^\circ$, հետևաբար $\angle BFC + \angle BEC = 180^\circ$: Դիցուք L կետը F կետի համաչափն է BC ուղղի նկատմամբ: Այդ դեպքում $\angle BEC + \angle BLC = \angle BEC + \angle BFC = 180^\circ$, հետևաբար B, E, C, L կետերով անցնում է շրջանագիծ: Քանի, որ $BL = BF = CE = p - BC \Rightarrow \cup BL = \cup EC \Rightarrow BE \parallel LC \Rightarrow$ $\angle EBC = \angle BCL = \angle BCF$ հետևաբար $BM = MC$:



Դիցուք K –ն AN ուղղի և BC կողմի հատման կետն է: Հայտնի է, որ K –ն BC կողմը շոշափող արտներգծյալ շրջանագծի շոշափման կետն է: Քանի, որ $BP = CK = p - AC$ և $BM = MC$, հետևաբար $PM = MK$:

Լեմմա1: Դիցուք ABC եռանկյան ներգծած շրջանագիծը BC կողմը շոշափում է P կետում և Q -ն P –ի տրամագծորեն հակադիր կետն է: Այդ դեպքում A, Q, K կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա:

MN հատվածը QPK եռանկյան միջին գիծն է, հետևաբար $MN = IP = r, \angle BAI = \angle BCT = \angle NCM$, հետևաբար

$\triangle AID = \triangle NMC$, հետևաբար $\dfrac{AB + AC - BC}{2} = AD = CM = \dfrac{BC}{2}$, որտեղից $AB + AC = 2BC$:

Դիտողություն1: BFN և CNE եռանկյուններում գրելով սինուսներ թեորեմ կստանանք $\dfrac{BN}{\sin\angle BFN} = \dfrac{BF}{\sin\angle FNB} = \dfrac{CE}{\sin\angle ENC} = \dfrac{CN}{\sin\angle NEC}$, որտեղից $BN = CN$:

Դիտողություն2: Քանի.որ $MN = IP = r$, հետևաբար $IN \parallel PK$:

Լեմմա2. Եռանկյան ներգծած շրջանագծի I կենտրոնը, միջնագծերի հատման G կետը և Նագելի կետը(N) գտնվում են մի ուղղի վրա: (Նագելի ուղիղ)

Ըստ լեմմա 2-ի G կետը պատկանում է IN հատվածին $(GN : GI = 2:1)$, հետևաբար $S(BNC) = S(BGC) = \dfrac{1}{3}S(ABC)$, որտեղից $BC \cdot r = \dfrac{1}{3}\left(AB + BC + AC\right) \cdot r$, որտեղից $AB + AC = 2BC$:

Դիտողություն3: Երբ $AB = AC$, ապա ABC եռանկյունը հավասարակողմ է: