ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ 11-12-րդ ԴԱՍԱՐԱՆՆԵՐ

ՄԱՐԶԱՅԻՆ ՓՈՒԼ 2022 թ

Տևողությունը – 180 րոպե

Խնդիր 1: Ապացուցել, որ գոյություն ունեն անվերջ քանակով բնական թվեր, որոնից յուրաքանչյուրի երեք փոքրագույն բաժանարարների գումարը բնական թվի քառակուսի է, իսկ երեք մեծագույն բաժանարարների գումարը՝ բնական թվի 2022 աստիճան:

Լուծում: Դիցուք $d_1 = 1, d_2 = 3, d_3 = 5$, հետևաբար $d_1 + d_2 + d_3 = 9$

Եթե d-ն N թվի բաժանարար է, ապա $\frac{N}{d}$ ևս բաժանարար է: Այդ դեպքում $N + \frac{N}{3} + \frac{N}{5} = \frac{23N}{15}$, հետևաբար $N = 15 \cdot 23^{2022n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ բավարարում է խնդրի պայմաններին:

Չափանիշեր

1) $d_1 + d_2 + d_3 = 9$ +2 միավոր

2) Եթե d-ն N թվի բաժանարար է, ապա $\frac{N}{d}$ ևս բաժանարար է: +1 միավոր

3) $N = 15 \cdot 23^{2022n-1}$ բավարարում է խնդրի պայմաններին: +2 միավոր

Խնդիր 2: Դիցուք $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_8$ թվերը ցանկացած $i = 1,2,3, \ldots ,8$ համար բավարարում են $m \leq a_i \leq n$ պայմանին, որտեղ m-ը և n-ը իրարից տարբեր բնական թվեր են: Պարզել, թե m-ի և n-ի ո՞ր արժեքների դեպքում

$$\frac{a_1}{a_8} + \frac{a_2}{a_7} + \frac{a_3}{a_6} + \frac{a_4}{a_5} + \frac{a_5}{a_4} + \frac{a_6}{a_3} + \frac{a_7}{a_2} + \frac{a_8}{a_1}$$

արտահայտության հնարավոր մեծագույն արժեքը բնական թիվ է:

Լուծում: Ապացուցենք, որ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{m}{n} + \frac{n}{m}$ երբ $m \leq x \leq y \leq n$: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \Leftrightarrow (\frac{y}{x} - \frac{m}{n})(\frac{y}{x} - \frac{n}{m}) \leq 0$, որը ճիշտ է, հետևաբար $A = \frac{a_1}{a_8} + \frac{a_2}{a_7} + \frac{a_3}{a_6} + \frac{a_4}{a_5} + \frac{a_5}{a_6} + \frac{a_6}{a_7} + \frac{a_7}{a_2} + \frac{a_8}{a_1} \leq \frac{4(m^2+n^2)}{mn}$:
Հավասարության դեպքը տեղի ունի, երբ $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = m, a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = n$, հետևաբար A -ի մեծագույն արժեքը հավասար է $\frac{4(m^2+n^2)}{mn}$:

Դիցուք (m,n)=d, հետևաբար m=dx, n=dy, որտեղ (x,y)=1, հետևաբար $\frac{4(m^2+n^2)}{mn} = \frac{4(m^2+n^2)}{mn} \Rightarrow \frac{4}{mn} \in N$ քանի, որ $(x^2 + y^2; xy)$=1 , հետևաբար՝ (x;y)=(1:2),(1;4), որտեղից՝ (m;n)=(d;2d);(d;4d),d∈ N:

Չափանիշեր

1) $A \leq \frac{4(m^2+n^2)}{mn}$ +2 միավոր

2) A -ի փոքրագույն արժեքը հավասար է $\frac{4(m^2+n^2)}{mn}$: +1 միավոր

3) (m;n)=(d;2d);(d;4d), d∈ N +2 միավոր

Խնդիր 3: Դիցուք ABC սուրանկյուն եռանկյան BE բարձրության շարունակությունը ABC եռանկյան O կենտրոնով արտագծած շրջանագիծը հատում է P կետում: Դիցուք F-ը OP հատվածի այնպիսի կետ է, որ EF⊥OP : BEF եռանկյան արտագծած շրջանագիծը AC կողմը հատում է K կետում: Հայտնի է, որ HP=2CK , որտեղ H-ը ABC եռանկյան բարձրությունների հատման կետն է: Գտեք $\angle ACB$ անկյունը:

Լուծում: Դիցուք OP ուղիղը ABC եռանկյան արտագծած շրջանագիծը հատում է T կետում, հետևաբար $\angle EBT = 90^0$, հետևաբար BT∥ AC : Դիցուք TL⊥AC: Քանի, որ $\angle EBT = \angle TLE = \angle EFT = 90^0$, հետևաբար B,T,L,F,E կետերով անցնում է TE տրամագծով շրջանագիծ, հետևաբար L-ը համընկնում է K-ի հետ: Քանի, որ ABTC քառանկյունը հավասարասրուն սեղան է, հետևաբար՝ AE=CK: Դիցուք AM⊥BC: Այդ դեպքում $\angle CBE = \angle MAC = \angle CAP$ և AE⊥HP, հետևաբար HE=EP=CK=AE, հետևաբար $\angle HAC = 45^0$, որտեղից՝ $\angle BCA = 45^0$:

Չափանիշեր

1) $\angle EBT = 90^0$: +1 միավոր

2) B,T,H,F,E կետերով անցնում է շրջանագիծ: +2 միավոր

3) AE=CK: +1 միավոր

4) $\angle BCA = 45^0$: +1 միավոր

Խնդիր 4: Գտեք $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ բազմության այն ենթաբազմությունների քանակը, որոնց տարրերի գումարը բաժանվում է 3-ի:

Լուծում: Եթե A բազմության B≠ ∅ ենթաբազմության տարրերի գումարը բաժանվում է 3-ի, ապա A\B ենթաբազմության տարրերի գումարը ևս բաժանվում է 3-ի: Այդ դեպքում |B|=1;2;3;4;9: Դիտարկենք բազմության 3-ի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդների հնարավոր հավաքածուները:

1) |B|=4:

Այս դեպքում մնացորդների հավաքածուն կունենա հետևյալ տեսքերը՝ (1;1;1;0);(2;2;2;0);(1;1;2;2);(1;2;0;0), հետևաբար չորս տարր պարունակող ենթաբազմությունների քանակը, որոնց տարրերի գումարը բաժանվում է 3-ի հավասար է՝ $A_4 = 3 + 3 + (C_3^2)^2 + (C_3^1)^2 C_3^2 = 42$:

2) |B|=3:

Այս դեպքում մնացորդների հավաքածուն կունենա հետևյալ տեսքերը՝ (1;1;1);(2;2;2);(1;2;0), (0;0;0), հետևաբար երեք տարր պարունակող ենթաբազմությունների քանակը, որոնց տարրերի գումարը բաժանվում է 3-ի հավասար է՝ $A_3 = 1 + 1 + 1 + 3^3 = 30$: Նմանապես՝ $A_2 = 12$ և $A_1 = 3$, հետևաբար բազմության այն ենթաբազմությունների քանակը, որոնց տարրերի գումարը բաժանվում է 3-ի հավասար է՝ 2(42+30+12+3)+1=175:

Չափանիշեր

1) Եթե A բազմության B$\neq \emptyset$ ենթաբազմության տարրերի գումարը բաժանվում է 3-ի, ապա A\B ենթաբազմության տարրերի գումարը ևս բաժանվում է 3-ի: +1 միավոր

2) $A_3 = 30$ +1 միավոր

3) $A_4 = 42$ +2 միավոր

4) Խնդիրը ավարտել է: +1 միավոր