X դասարան

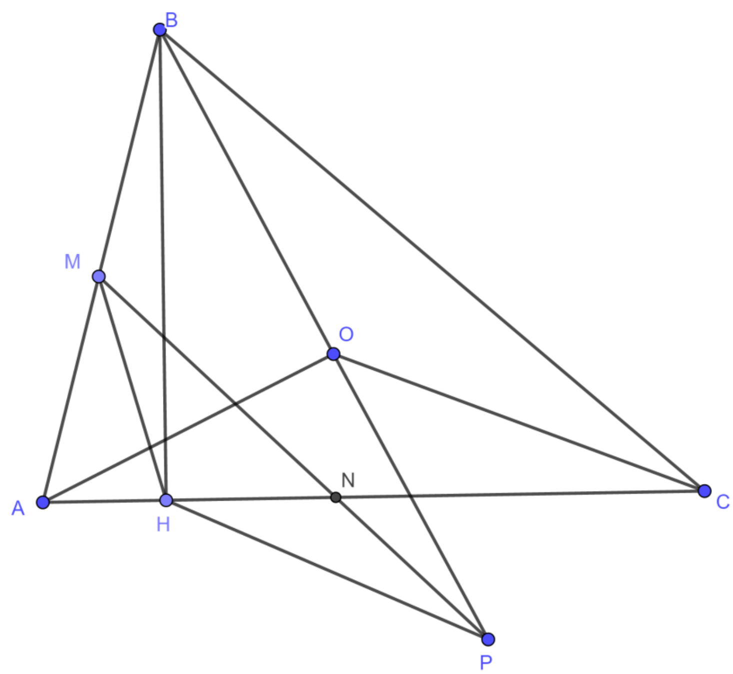
Խնդիր 1: Գտնել p-ի հնարավոր փոքրագույն արժեքը, որի դեպքում x^3-px+q բազմանդամն ինչ-որ q թվի դեպքում ունենա ճիշտ երկու հատ իրարից տարբեր բնական արմատներ:

Լուծում: Ենթադրենք, որ $x^3-px+q=0$ հավասարումը ունի $a\neq b$ բնական արմատներ: Այդ դեպքում $a^3-pa+q=0$ և $b^3-pb+q=0$, որտեղից $(a-b)(a^2+ab+b^2-p)=0 \Longrightarrow a^2+ab+b^2=p\geq 7$, երբ $a=1, b=2$ ⟹q=6:

$x^3-7x+6=0$ հավասարման լուծումներն են 1,2,-3 թվերը:

Խնդիր 2: Դիցուք H-ը ABC սուրանկյուն եռանկյան BH բարձրության հիմքն է, իսկ O-ն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Դիցուք H կետով անցնող և OC ուղղին զուգահեռ ուղիղը BO ուղիղը հատում է P կետում: Ապացուցել, որ AB և AC հատվածների միջնակետերը և P կետը գտնվում են մեկ ուղղի վրա:

Լուծում:



Դիցուք M-հատվածի AB հատվածի միջնակետն է,PM -ը հատվածը հատում է N կետում և $\angle A=\alpha, \angle B=\beta$: $\angle ABH=90^0-\alpha=\angle OBC=\angle OCB \Longrightarrow \angle COP=180^0-2\alpha=\angle OPH$:

$HM=MB \Longrightarrow \angle AMH=180^0-2\alpha=\angle OPH$,հետևաբար H,M,B,P կետերով անցնում է շրջանագիծ, հետևաբար $\angle HMP=\angle HBP$:

$\angle AMN=180^0-2\alpha+\angle HMN=180^0-2\alpha+\angle HBP=\beta \Longrightarrow MN \parallel BC,$ հետևաբար N–ը AC կողմի միջնակետն է:

Խնդիր 3։

Առաջին լուծում։ Դիցուք $(a,b)\star(c,d) = (m,n)$։ Նկատենք, որ

$$m+n=ac+bd+ad+bc=(a+b)(c+d)$$

և

$$m-n=ac+bd-ad-bc=(a-b)(c-d)։$$

Նույն դատողությունը 2021 անգամ կիրառելով (3,4) թվազույգի համար կստանանք, որ

$$A+B=7^{2021}$$
$$A-B=(-1)^{2021}=-1։$$

Օգտվելով (1), (2) հավասարումներից ստանում ենք՝ $A+3B = 2\cdot 7^{2021}+1$։

Երկրորդ Լուծում ։ Յուրաքանչյուր (a,b) թվազույգի համար դիտարկենք $P_{a,b}(x)$ բազմանդամ, որը տրվում է $P_{a,b}(x)=a+bx$ բանաձևով։ Նկատենք, որ (a,b) և (c,d) զույգերի հետ կատարելով $*$ գործողությունը, ստանում ենք մի զույգ, որի համապատասխան բազմանդամը $P_{a,b}(x)\cdot P_{c,d}(x)$ արտադրյալի մնացորդն է x^2-1-ի բաժանելիս։ Իրոք՝

$$P_{a,b}(x)\cdot P_{c,d}(x)=(a+bx)(c+dx)=ac+(ad+bc)x+bdx^2=$$
$$=ac+bd+(ad+bc)x+bd(x^2-1)$$

Հետևաբար $P_{a,b}(x)\cdot P_{c,d}(x)$-ի մնացորդը x^2-1-ի բաժանելիս կլինի $ac+bd+(ad+bc)x$ բազմանդամը, որը համապատասխանում է $(ac+bd,ad+bc)$ զույգին։ Հանգունորեն նման պնդում ստանում ենք մի քանի զույգի համար։

Այսպիսով, խնդրում նշված (A,B) զույգին համապատասխան բազմանդամը՝ $A+Bx$-ը, կլինի $(3+4x)^{2021}$ բազմանդամի մնացորդը x^2-1-ի բաժանելիս։ Հետևաբար գոյություն ունի $Q(x)$ բազմանդամ, որի համար տեղի ունի հետևյալ նույնությունը՝

$$(3+4x)^{2021}=(x^2-1)Q(x)+A+Bx \qquad (3)$$

Տեղադրելով $x=\pm1$ արժեքները (3) նույնության մեջ, կստանանք՝

$$A+B=7^{2021} \quad \text{և} \quad A-B=-1։$$

Այստեղից՝ $A+3B=2\cdot 7^{2021}+1$։