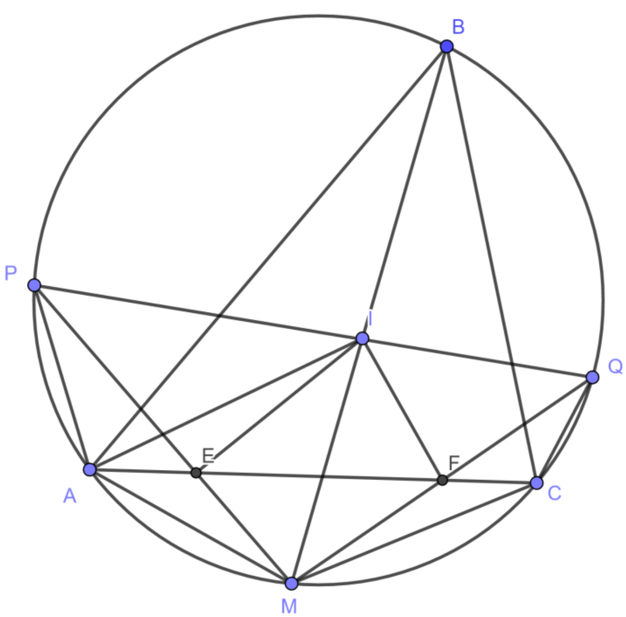
10-րդ դասարան

Խնդիր 4: Դիցուք սեղանին դրված են 2020 հատ քարտեր: Քարտերից մեկի վրա գրված է 1, երկրորդի վրա գրված է 2, երրորդի վրա գրված է 3 և այդպես շարունակ վերջինի վրա գրված է 2020: Հովհաննեսն ու Նարեն խաղում են հետևյալ խաղը. յուրաքանչյուր քայլի սկզբում Հովհաննեսը, իսկ հետո Նարեն (Նարեն տեսնում է Հովհաննեսի ընտրած քարտը) ընտրում են մեկական քարտեր և գրատախտակին գրում են այդ երկու քարտերի վրա գրված թվերի գումարը: Այդպիսի 1010 հատ քայլերից հետո քարտերն ավարտվում են, որից հետո հաշվում են գրատախտակին գրված 1010 թվերի արտադրյալը: Եթե այդ արտադրյալը բնական թվի քառակուսի է, ապա հաղթում է Հովհաննեսը, իսկ հակառակ դեպքում հաղթում է Նարեն: Պարզել, թե խաղացողներից ո՞ր մեկն ունի հաղթական մարտավարություն:

Լուծում: 1-ից մինչև 2020 թվերը տրոհենք հետևյալ թվազույգերի (1,6), (2,5), (3,4), (7,12),(8,11), (9,10),…(6k+1, 6k+6), (6k+2, 6k+5), (6k+3,6k+4),….(2011,2016),(2012,2015),(2013,2014),(2017, 2018), (2019,2020): Ամեն անգամ երբ Հովհաննեսն ընտրում է որևէ թիվ, Նարեն ընտրում է այդ թվազույգի մյուս թիվը: Այդ դեպքում գրատախտակին գրված թվերից միայն 2017+2018=4035 թիվը կբաժանվի 3-ի, բայց այն չի բաժանվի 9-ի: Հետևաբար բոլոր թվերի արտադրյալը պարզ արտադրիչների վերլուծելիս 3-ի ցուցիչը կլինի 1, ուստի այն թվի աստիճան չէ:

Խնդիր 5: ABC սուրանկյուն եռանկյունում I–ն ներգծած շրջանագծի կենտրոն է: BI ուղիղը եռանկյան արտագծած ω շրջանագիծը հատում է M կետում: M և I կետերով անցնող շրջանագիծը AC հատվածը հատում է E և F կետերում: Դիցուք ME և MF ուղիղները ω –ն հատում է համապատասխանաբար P և Q կետերում: Ապացուցեք, որ P,I,Q կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա:

Լուծում:



Դիցուք $\angle ABI = \angle CBI = \angle CAM = \angle MPA = \alpha, \angle BAC = 2\beta \Longrightarrow \angle IAM = \angle AIM = \alpha + \beta \Longrightarrow IM = AM$: Քանի, որ $\angle MAC = \angle APE = \alpha \Longrightarrow \Delta AEM \sim \Delta APM \Longrightarrow AM^2 = ME \cdot MP = IM^2 \Longrightarrow \frac{MI}{MP} = \frac{ME}{MI}$ և PMI անկյունը ընդհանուր է, հետևաբար $\Delta PMI \sim \Delta IEM \Longrightarrow \angle PIM = \angle IEM$: Նմանապես՝ $\angle IFM = \angle QIM$, որտեղից $\angle PIM + \angle QIM = \angle IEM + \angle IFM = 180^0$, հետևաբար P,I,Q կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա:

Խնդիր 6: Դիցուք տրված է a_0 բնական թիվը: Դիցուք $\{a_n\}_{n\geq 1}$ անվերջ հաջորդականությունը որոշվում է հետևյալ կերպ. տրված $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ թվերի համար a_n -ը ամենափոքր բնական թիվն է, որի համար $\sqrt[n]{a_0\, a_1\, \dots a_n}$ արտահայտության արժեքը բնական թիվ է: Ապացուցել, որ ինչ-որ պահից սկսած $\{a_n\}_{n\geq 1}$ հաջորդականության բոլոր անդամները կլինեն նույնը:

Լուծում: Նշանակենք $S_n = \sqrt[n]{a_0\, a_1\, \dots a_n}$: Նկատենք, որ $S_n = \sqrt[n+1]{a_0\, a_1\, \dots a_n S_n} \in \mathrm{N}$, հետևաբար $S_{n+1} \leq S_n$ և $a_n \leq S_n$: Քանի որ S_n հաջորդականությունը չաճող է և բնական թվեր են, ուստի ինչ-որ պահից հետո S_n հաջորդականության բոլոր թվերը լինելու են նույնը, այսինքն $S_{n+1} = S_n$: Սա հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ $a_n = S_n$, այսինքն ինչ-որ պահից սկսած $\{a_n\}_{n\geq 1}$ հաջորդականության էլեմենտները նույնպես պետք է լինեն նույնը: