Մաթեմատիկայի հանրապետական օլիմպիադա

22 մարտի 2019

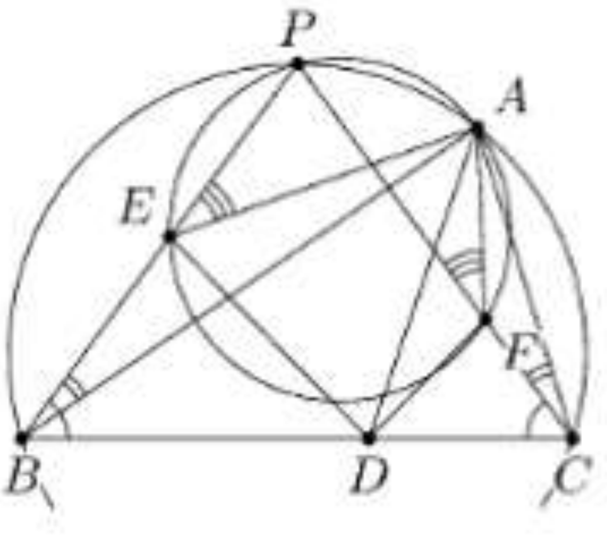
10-րդ դասարան – առաջին օր

1) Դիցուք տրված a, b, c, d թվերից ոչ բոլորն են ամբողջ, սակայն նրանցից ցանկացած երեքի գումարն ամբողջ թիվ է: Կարո՞ղ է արդյոք $abc - d^3$ արտահայտության արժեքը լինել ամբողջ թիվ:
Լուծում: Այո, օրինակ $a = b = c = d = \frac{1}{3}$:

2. Դիցուք $ABC\ (AB > BC)$ եռանկյան A գագաթին առընթեր արտաքին անկյան կիսորդը ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը հատում է P կետում: Դիցուք A և P կետերով անցնող շրջանագիծը BP և CP հատվածները հատում է համապատասխանաբար E և F կետերում: Դիցուք AD-ն ABC եռանկյան կիսորդն է: Ապացուցել, որ $\angle PED = \angle PFD$:

Լուծում:

Դիցուք AD ուղիղը ABC եռանկյան արտագծած շրջանագիծը հատում է K կետում (K–ն BC աղեղի միջնակետն է): Քանի, որ $\angle PAK = 90^{\circ}$, հետևաբար P–ն BAC աղեղի միջնակետն է, որտեղից $BP = CP$:



$\angle PEA = \angle PFA, \angle EBA = \angle FCA \Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle AFC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{FC}$:

Ըստ եռանկյան կիսորդի հատկության $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, որտեղից $\frac{EB}{FC} = \frac{BD}{DC}$ և $\angle PBD = \angle PCD \Rightarrow \triangle BED \sim \triangle DFC \Rightarrow \angle BED = \angle DFC \Rightarrow \angle PED = \angle PFD$:

3) Մաթեմատիկայի օլիմպիադային մասնակցում է 300 աշակերտ, ընդ որում աշակերտների ցանկացած եռյակում կա իրար անծանոթ զույգ: Հայտնի է, որ ցանկացած աշակերտ ճանաչում է ամենաշատը k աշակերտի: Հայտնի է նաև, որ ցանկացած $1 \leq s \leq k$ թվի համար գոյություն ունի գոնե մեկ աշակերտ, ով ճանաչում է ճիշտ s աշակերտի: Գտնել k–ի հնարավոր մեծագույն արժեքը:

<u>ԾԱՆՈԹԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆ</u>. եթե A աշակերտը ծանոթ է B աշակերտին, ապա B աշակերտը ծանոթ է A աշակերտին:

Լուծում:

Ենթադրենք A_{k+1} աշակերտը ծանոթ է $A_1, A_2, \cdots, A_k$ աշակերտներին: Քանի, որ $A_{k+1}, A_i, A_j\ (1 \leq i, j \leq k)$ աշակերտների կամայական եռյակում A_i և A_j աշակերտները ծանոթ չեն, ապա կամայական $A_i\ (1 \leq i \leq k)$ աշակերտ ծանոթ է ամենաշատը $300-k$ աշակերտի:

Այդ դեպքում $A_{k+1}, A_{k+2}, \cdots, A_{300}$ աշակերտներից յուրաքանչյուրը պետք է ծանոթ լինի $301-k, 302-k, \cdots, k$ թվերից որևէ մեկ քանակությամբ աշակերտների:

Հետևաբար $300-(k+1)+1 \geq k-(301-k)+1$, որտեղից ՝ $k \leq 200$:

Նկարագրենք $k=200$ դեպքը:

$A_{201} \to A_1, A_2, \cdots, A_{200}$
$A_{202} \to A_2, A_3, \cdots, A_{200}$
$A_{203} \to A_3, A_4, \cdots, A_{200}$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$A_{300} \to A_{100}, A_{101}, \cdots, A_{200}$

Այս դեպքում $A_1, A_2, \cdots, A_{100}$ աշակերտները ծանոթ են համապատասխանաբար $1, 2, \cdots, 100$ աշակերտների, իսկ $A_{201}, A_{202}, \cdots, A_{300}$ աշակերտները ծանոթ են համապատասխանաբար $200, 199, \cdots, 101$ աշակերտների: