Մաթեմատիկայի հանրապետական օլիմպիադա
23 մարտի 2019

10-րդ դասարան – երկրորդ օր

4) Գոյություն ունեն k հատ հաջորդական բնական թվեր այնպես, որ նրանց գումարի և արտադրյալի վերջին երկու թվանշանները համընկնում են, եթե

1)$k = 2019$: 2)$k = 2020$ 3)$k = 2024$

Լուծում: k հատ հաջորդական բնական թվերի գումարը նշանակենք A –ով, իսկ արտադրյալը՝ A -ով: $k > 9$ դեպքում $B\,\vdots\,4$ և $B\,\vdots\,25$, հետևաբար A –ի վերջին երկու թվանշաններն են 00-ն:

1) $k = 2019$ դեպքին բավարարում են $10^4 - 1009, \cdots, 10^4 - 1, 10^4, 10^4 + 1, \cdots, 10^4 + 1009$ թվերը քանի, որ յուրաքանչյուր $\left(10^4 - i, 10^4 + i\right)$ զույգի գումարը հավասար է $2 \cdot 10^4$, հետևաբար A –ն և B -ն վերջանում են 00-ով:

2) $n, n+1, \cdots, n+2019$ թվերի գումարը՝ $A = 1010\left(2n + 2019\right)$ չի բաժանվում 4-ի, իսկ $B\,\vdots\,4$: Քանի, որ B –ի վերջին երկու թվանշանը $0a$ կամ ab տեսքի է, որտեղ կամ $a\,\vdots\,4$ կամ $ab\,\vdots\,4$, հետևաբար վերջին երկու թվանշանները չեն համընկնում:

3) Օրինակ՝ $551, 552, \cdots, 1561, 1562, 1563, \cdots, 2574$:

Տես 11-12 դասարանի 4-րդ խնդրի լուծումը:

5) Դիցուք $1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_k = a$ թվերը a բնական թվի բաժանարարներն են, իսկ $1 = b_1 < b_2 < \cdots < b_l = b$ թվերը b բնական թվի բաժանարարներն են: Գտեք a և b թվերը, եթե հայտնի է, որ $a_{10} + b_{10} = a$ և $a_{11} + b_{11} = b$:

Տես 11-12 դասարանի 5-րդ խնդրի լուծումը:

6) ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետի համաչափ կետը BC կողմի նկատմամբ պատկանում է ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծին: Ապացուցեք, որ $\dfrac{AB + AC}{2} \le BC$:

Պարզել, թե երբ տեղի ունի հավասարության դեպքը:

Լուծում 1: Դիցուք D –ն M –ի համաչափն է BC կողմի նկատմամբ: Այդ դեպքում $\triangle BMC = \triangle BDC \Rightarrow \angle BMC = \angle BDC \Rightarrow 180^\circ = \angle BDC + \angle BAC = \angle C_1MB_1 + \angle C_1AB_1$, հետևաբար A, B_1, M, C_1 կետերով անցնում է շրջանագիծ, որտեղից $\angle C_1AM = \angle C_1B_1M$:

$C_1B_1 \parallel BC \Rightarrow \angle C_1B_1M = \angle MBC \Rightarrow \angle C_1AM = \angle MBC \Rightarrow \triangle BAA_1 \sim \triangle BMA_1 \Rightarrow \dfrac{AA_1}{BA_1} = \dfrac{BA_1}{MA_1}$

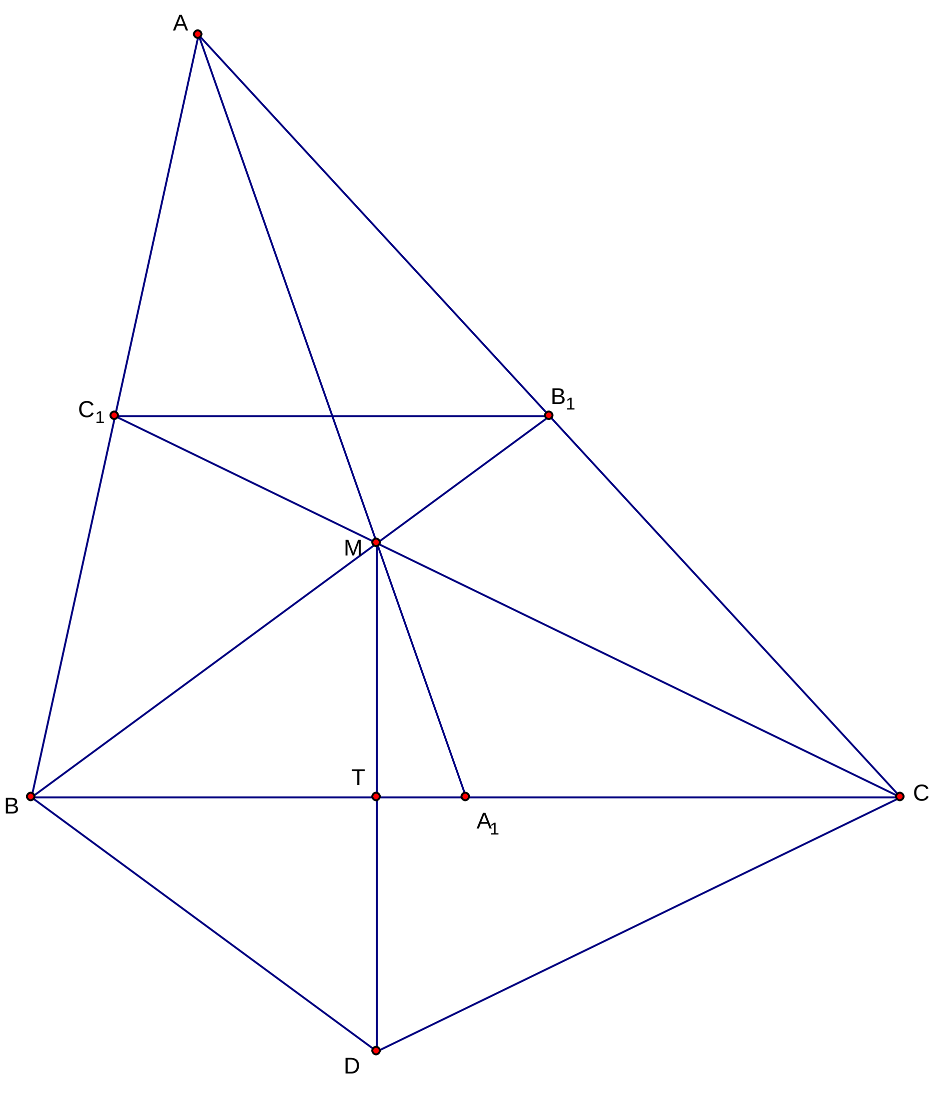
$\Rightarrow BA_1^2 = AA_1 \cdot MA_1 \Rightarrow \dfrac{BC^2}{4} = AA_1 \cdot \dfrac{AA_1}{3} \Rightarrow 3BC^2 = 4AA_1^2$:

Քանի, որ $2\left(AB^2 + AC^2\right) = \left(2AA_1\right)^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 2BC^2$, որտեղից

$2BC^2 = AB^2 + AC^2 \geq \dfrac{\left(AB + AC\right)^2}{2} \Rightarrow \dfrac{AB + AC}{2} \leq BC$:

Հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $AB = AC$ և

$3BC^2 = 4AA_1^2 = 4\left(AB^2 - \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2\right) \Rightarrow BC = AB$, որտեղից՝ ABC եռանկյունը հավասարակողմ է:



Լուծում 2: Դիցուք D–ն M –ի համաչափն է BC կողմի նկատմամբ և P–ն M –ի համաչափն է BC կողմի միջնակետի նկատմամբ: Այդ դեպքում $\triangle BMC = \triangle BDC \Rightarrow \angle BMC = \angle BDC$ $\Rightarrow 180^\circ = \angle BDC + \angle BAC = \angle BDC + \angle BPC$, P -ն պատկանում է եռանկյան արտագծած շրջանագծին:

Ըստ հատվող լարերի հատկության՝ $\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = AA_1 \cdot PA_1 \Rightarrow \frac{BC^2}{4} = AA_1 \cdot \frac{AA_1}{3} \Rightarrow 3BC^2 = 4AA_1^2$:

Քանի, որ $2\left(AB^2 + AC^2\right) = \left(2AA_1\right)^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 2BC^2$, որտեղից

$$2BC^2 = AB^2 + AC^2 \geq \frac{\left(AB + AC\right)^2}{2} \Rightarrow \frac{AB + AC}{2} \leq BC :$$

Հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $AB = AC$ և

$3BC^2 = 4AA_1^2 = 4\left(AB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2\right) \Rightarrow BC = AB$, որտեղից՝ ABC եռանկյունը հավասարակողմ է: