ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ 10-րդ ԴԱՍԱՐԱՆ
ՄԱՐԶԱՅԻՆ ՓՈՒԼ 2022 թ

Տևողությունը – 180 րոպե

Խնդիր 1: Գոյություն ունի՞ արդյոք բնական թիվ, որի երեք փոքրագույն բաժանարարների գումարը բնական թվի քառակուսի է, իսկ երեք մեծագույն բաժանարարների գումարը՝ բնական թվի խորանարդ:

Լուծում: Դիցուք $d_1 = 1, d_2 = 3, d_3 = 5$, հետևաբար $d_1 + d_2 + d_3 = 9$

Եթե d-ն N թվի բաժանարար է, ապա $\frac{N}{d}$ ևս բաժանարար է: Այդ դեպքում $N + \frac{N}{3} + \frac{N}{5} = \frac{23N}{15}$, հետևաբար $N = 15 \cdot 23^2$ բավարարում է խնդրի պայմաններին:

Չափանիշեր

1) $d_1 + d_2 + d_3 = 9$ +2 միավոր

2) Եթե d-ն N թվի բաժանարար է, ապա $\frac{N}{d}$ ևս բաժանարար է: +1 միավոր

3) $N = 15 \cdot 23^2$ բավարարում է խնդրի պայմաններին: +2 միավոր

Խնդիր 2: Դիցուք $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ թվերը ցանկացած $i = 1,2,3,\dots,8$ համար բավարարում են $1 \le a_i \le 2$ պայմանին: Գտնել

$$\frac{a_1}{a_8} + \frac{a_2}{a_7} + \frac{a_3}{a_6} + \frac{a_4}{a_5} + \frac{a_5}{a_4} + \frac{a_6}{a_3} + \frac{a_7}{a_2} + \frac{a_8}{a_1}$$

Արտահայտության հնարավոր մեծագույն և փոքրագույն արժեքները:

Լուծում: Քանի, որ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ge 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2 (x, y > 0)$, հետևաբար $A = \frac{a_1}{a_8} + \frac{a_2}{a_7} + \frac{a_3}{a_6} + \frac{a_4}{a_5} + \frac{a_5}{a_4} + \frac{a_6}{a_3} + \frac{a_7}{a_2} + \frac{a_8}{a_1} \ge 8$: Հավասարության դեպքը տեղի ունի, երբ $a_1 = a_2 = \cdots a_8$, հետևաբար A -ի փոքրագույն արժեքը հավասար է 8:

Ապացուցենք որ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \le \frac{5}{2}$, երբ $1 \le x \le y \le 2$: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \le \frac{5}{2} \Leftrightarrow (\frac{2y}{x} - 1)(\frac{y}{x} - 2) \le 0$, որը ճիշտ է, հետևաբար $A \le 10$: Հավասարության դեպքը տեղի ունի, երբ $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 2, a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 1$, հետևաբար A -ի մեծագույն արժեքը հավասար է 10:

Չափանիշեր

1) $A \ge 8$: +1 միավոր

2) A -ի փոքրագույն արժեքը հավասար է 8: +1 միավոր

3) $A \leq 10$ +2 միավոր

4)A -ի մեծագույն արժեքը հավասար է 10: +1միավոր

Խնդիր 3: ABC($\angle B > 90^0$) եռանկյան BE բարձրության շարունակությունը ABC եռանկյան O կենտրոնով արտագծած շրջանագիծը հատում է P կետում: Դիցուք F-ը OP հատվածի այնպիսի կետ է, որ EF⊥OP : BEF եռանկյան արտագծած շրջանագիծը AC կողմը հատում է K կետում: Ապացուցեք, որ AE=CK:

Լուծում: Դիցուք OP ուղիղը ABC եռանկյան արտագծած շրջանագիծը հատում է T կետում, հետևաբար $\angle EBT = 90^0$, հետևաբար BT∥ AC : Դիցուք TH⊥AC: Քանի, որ $\angle EBT = \angle THE = \angle EFT = 90^0$, հետևաբար B,T,H,F,E կետերով անցնում է TE տրամագծով շրջանագիծ, հետևաբար H-ը համընկնում է K-ի հետ: Քանի, որ ABTC քառանկյունը հավասարասրուն սեղան է, հետևաբար՝ AE=CK:

Չափանիշեր

1) $\angle EBT = 90^0$: +2 միավոր

2) B,T,H,F,E կետերով անցնում է շրջանագիծ: +2 միավոր

3) AE=CK: +1 միավոր

Խնդիր 4: Դիցուք $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ բազմությունից ընտրել են k հատ ենթաբազմություն այնպես,որ ընտրված ենթաբազմություններից ցանկացած երկուսի հատումը դատարկ չէ: Գտեք k-ի հնարավոր մեծագույն արժեքը:

Լուծում: Եթե $B = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ բազմության յուրաքանչյուր ենթաբազմությանը միավորենք 1-ը, կստացվի A բազմության 256 ենթաբազմություն, որոնցից կամայական երկուսի հատումը դատարկ չէ, հետևաբար՝ $k \geq 256$: A բազմության 512 ենթաբազմությունները բաժանենք 256 զույգերի այնպես, որ յուրաքանչյուր զուգին պատկանող ենթաբազմությունների միավորումը՝ A-ն է, իսկ ցանկացած երկուսի հատումը՝ դատարկ: Եթե ընտրենք $k > 256$ ենթաբազմություն, ապա կգտնվի առնվազն երկու ենթաբազմություն, որոնք զույգ են, հետևաբար ընտրվածների մեջ կլինեն երկու ենթաբազմություն, որոնց հատումը դատարկ է, հետևաբար՝ $k = 256$:

Չափանիշներ

1) $k \geq 256$ +2 միավոր

2) $k = 256$: +3 միավոր