ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ 9-րդ ԴԱՍԱՐԱՆ
ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՓՈՒԼ 2020թ.
Օր 2-րդ
Առաջադրանքները և լուծումները

4. Դիցուք x-ը և y-ը փոխադարձաբար պարզ բնական թվեր են: Գտնել թե ի՞նչ բնական արժեքներ կարող է ընդունել $\frac{x+1}{y}+\frac{y+1}{x}$ արտահայտությունը:

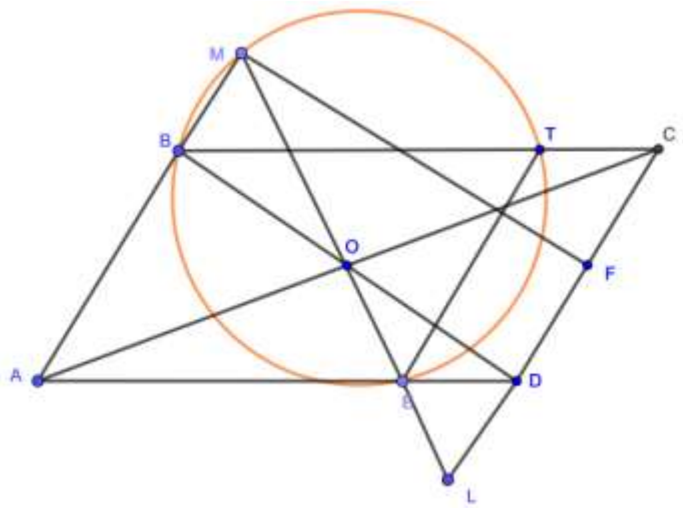
Լուծում: $A=\frac{x+1}{y}+\frac{y+1}{x}=\frac{(x+1)x+y(y+1)}{xy}\Rightarrow y(y+1)\vdots x$ և $(x,y)=1\Rightarrow y+1\vdots x$:
Նմանապես՝ $x+1\vdots y$, հետևաբար $x+y+1\vdots y$, $x+y+1\vdots x$ և
$(x,y)=1\Rightarrow x+y+1\vdots xy\Rightarrow x+y+1\geq xy\Leftrightarrow(x-1)(y-1)\leq 2$: Ենթադրենք $y\geq x$:
Երբ $x=1\Rightarrow A=\frac{2}{y}+y+1\Rightarrow y=1;2\Rightarrow A=4$:
Երբ $x=2\Rightarrow y=3\Rightarrow A=3$, հետևաբար $A=\{3,4\}$:
Լուծում 2: $A=\frac{x+1}{y}+\frac{y+1}{x}=\frac{(x+1)x+y(y+1)}{xy}\Rightarrow y(y+1)\vdots x$ և
$(x,y)=1\Rightarrow y+1\vdots x\Rightarrow y+1\geq x\Rightarrow x-y\leq 1$: Նմանապես՝ $x+1\vdots y$:
Ենթադրենք $x\geq y$:
1) $x-y=1\Rightarrow A=2+\frac{2}{y}\in\mathrm{N}\ \Rightarrow y=1;2\Rightarrow A=\{3,4\}$:
2) $x=y\Rightarrow\frac{x+1}{y}=\frac{y+1}{y}=1+\frac{1}{y}\in\mathrm{N}\ \Rightarrow y=1\Rightarrow A=4$, հետևաբար $A=\{3,4\}$:

5. Դիցուք $ABCD$ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են կետում O, իսկ CD կողմի միջնուղղահայացը AB ուղիղը հատում է M կետում, ընդ որում B կետը գտնվում է A և M կետերի միջև: Դիցուք MO ուղիղը AD ուղիղը հատում է E կետում, իսկ BME եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը BC հատվածը հատում է T կետում: Ապացուցել, որ $ME=BT$:

Լուծում 1: Դիցուք O կետից AD ուղղին տարված զուգահեռը AB և CD հատվածները հատում է P և F կետերում: Ըստ Թալեսի թեորեմի P–ն և F-ը

համապատասխանաբար AB և CD հատվածների միջնակետերն են, հետևաբար
$PO=FO=\frac{AD}{2}$: $AB\,||\,CD$ և $ME\perp CD\Rightarrow\angle PMF=90^{\circ}\Rightarrow PO=OF=MO$ քանի, որ O–ն եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է, հետևաբար
$\angle PMO=\angle MPO=\angle MAE=\angle MAT=\angle MET$
և $\angle MED=2\angle MAE\Rightarrow\angle TED=\angle BAC\Rightarrow TE\,||\,AB$ և $AE\,||\,BT$, հետևաբար $ABTE$ քառանկյունը զուգահեռագիծ է, որտեղից $AE=AM=BT$:

Լուծում 2:



Դիցուք L–ը M–ի համաչափն է O կետի նկատմամբ: Այդ դեպքում $BMDL$ քառանկյունը զուգահեռագիծ է, որտեղից $DL \| BM \| CD$, հետևաբար C, D, L կետերը գտնվում մի ուղղի վրա: $MD = BL = MC$,հետևաբար $BMCL$ քառանկյունը հավասարասրուն սեղան է, որտեղից $\angle AML = \angle MLD = \angle BCL = \angle MAD$: Մնացածը լուծում 1-ի նման:

6. Գրատախտակին գրված են 2020 թվեր: Այդ թվերը կամայական ձևով բաժանել են զույգերի և հաշվել յուրաքանչյուր զույգի գումարը: Հայտնի է, որ կամայական բաժանման դեպքում ստացված 1010 գումարներից գոնե երկուսը հավասար են: Ամենաշատը քանի՞ զույգ առ զույգ տարբեր թիվ կարող է գրված լինել գրատախտակին:

Լուծում: Դիցուք գրատախտակին գրված տարբեր թվերի քանակը հավասար է A–ի և $A \geq 1010$: Գրատախտակին գրված թվերը բաժանենք $B = \{a_1, a_2, \cdots a_{1010}\}$ և $C = \{a_{1011}, a_{1012}, \cdots a_{2020}\}$ բազմությունների, այնպես, որ $a_1 > a_2 > \cdots > a_{1010}$ և $a_{1011} \geq a_{1012} \geq \cdots \geq a_{2020}$: Այդ դեպքում $a_1 + a_{1011} > a_2 + a_{1012} > \cdots > a_{1010} + a_{2020}$, այսինքն ստացված 1010 գումարները տարբեր են, հետևաբար $A \leq 1009$:

Բերենք $A = 1009$–ին բավարարող օրինակ՝ $\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{1012}, 2, \cdots, 1008, 1009$: Այս թվերի կամայական բաժանման դեպքում կգտնվի երկու զույգ, որոնց գումարելիներից յուրաքանչյուրը 1 է, հետևաբար այդ զույգերի գումարը հավասար է 2-ի:

Ուշադրություն: Յուրաքանչյուր առաջադրանքի ճիշտ լուծումը գնահատվում է առավելագույնը 7 միավոր: