

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ 9-րդ ԴԱՍԱՐԱՆ
ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՓՈՒԼ, 2020թ.

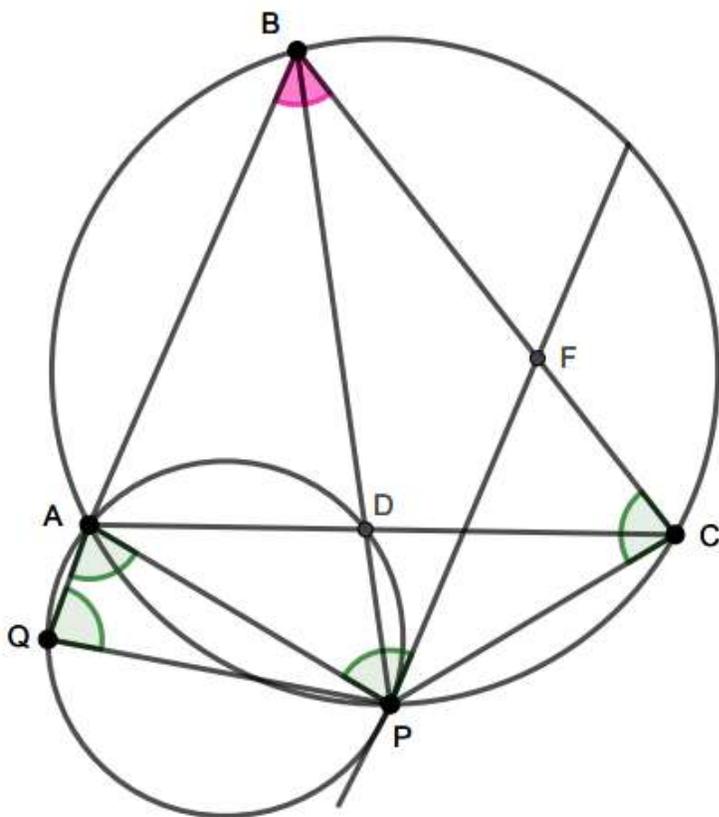
Առաջադրանքները և լուծումները

1) Պարզել, թե n բնական թվի $n!$ -ը արժեքների դեպքում $n!+223$ արտահայտության արժեքը բնական թվի խորանարդ է:

Լուծում: Երբ $n \geq 6$, $n!+223$ -ը 9-ի վրա բաժանելիս տալիս է 7 մնացորդ, իսկ բնական թվի խորանարդը՝ 0, 1 կամ 8 մնացորդ, հետևաբար՝ $n \leq 5$, որոնցից բավարարում է $n = 5$, քանի, որ $5!+223 = 7^3$:

2) Դիցուք P -ն ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի B գագաթը չպարունակող AC աղեղի միջնակետն է: Դիցուք l -ը P կետով անցնող և AB ուղիղին զուգահեռ ուղիղն է, իսկ A կետով անցնող և l -ին P կետում շոշափող շրջանագիծը AB ուղիղը հատում է A -ից տարբեր Q կետում: Ապացուցել, որ $BQ = BC$:

Լուծում: Դիցուք l -ը և BC -ն հատվում են F կետում:



Այդ դեպքում $\angle QAP = \angle APF = \angle AQP \Rightarrow AP = QP$ և $\angle ACP = \angle PBA = \angle PBC = \angle CAP \Rightarrow AP = PC$, հետևաբար $AP = PC = QP$:

$\angle QPB = 180^\circ - \angle BQP - \angle QBP = 180^\circ - \angle QAP - \angle PBC = 180^\circ - \angle BCP - \angle PBC = \angle BPC$: Քանի, որ $\angle BPC = \angle QBP, QP = PC, BP = BP \Rightarrow \square BQP = \square BPC \Rightarrow BQ = BC$:

3) Դիցուք S -ը բոլոր $n^2 + n + 1$ տեսքի բնական թվերի բազմությունն է, որտեղ n -ը բնական թիվ է: Ապացուցել, որ գոյություն ունեն անվերջ քանակությամբ զույգ առ զույգ իրարից տարբեր $a, b, c, d \in S$ թվեր, որոնց համար $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \in S$:

Լուծում: Գրենք բազմությանը պատկանող մի քանի թվեր՝ $3, 7, 13, 21, 43, 57, 73, 91, \dots$ և նկատենք, որ $3 \cdot 7 = 21 \Rightarrow (1^2 + 1 + 1)(2^2 + 2 + 1) = 4^2 + 4 + 1$ և $13 \cdot 7 = 21 \Rightarrow (3^2 + 3 + 1)(2^2 + 2 + 1) = 9^2 + 9 + 1$, որտեղից կարելի է եզրակացնել, որ

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + n + 1)((n-1)^2 + (n-1) + 1) = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1) = (n^2 + 1)^2 - n^2 = n^4 + n^2 + 1:$$

Նմանապես $(n+1)^4 + (n+1)^2 + 1 = (n^2 + n + 1)((n+1)^2 + (n+1) + 1)$, հետևաբար

$a = n^4 + n^2 + 1, b = (n-1)^2 + (n-1) + 1$ և $d = (n+1)^2 + (n+1) + 1, c = (n+1)^4 + (n+1)^2 + 1$ տեսքի թվերը բավարարում են խնդրի պայմաններին:

Ուշադրություն: Յուրաքանչյուր առաջադրանքի ճիշտ լուծումը գնահատվում է առավելագույնը **7** միավոր: