ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ 8-րդ ԴԱՍԱՐԱՆ

ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՓՈՒԼ 2020թ.

Օր 2-րդ

Առաջադրանքները և լուծումները

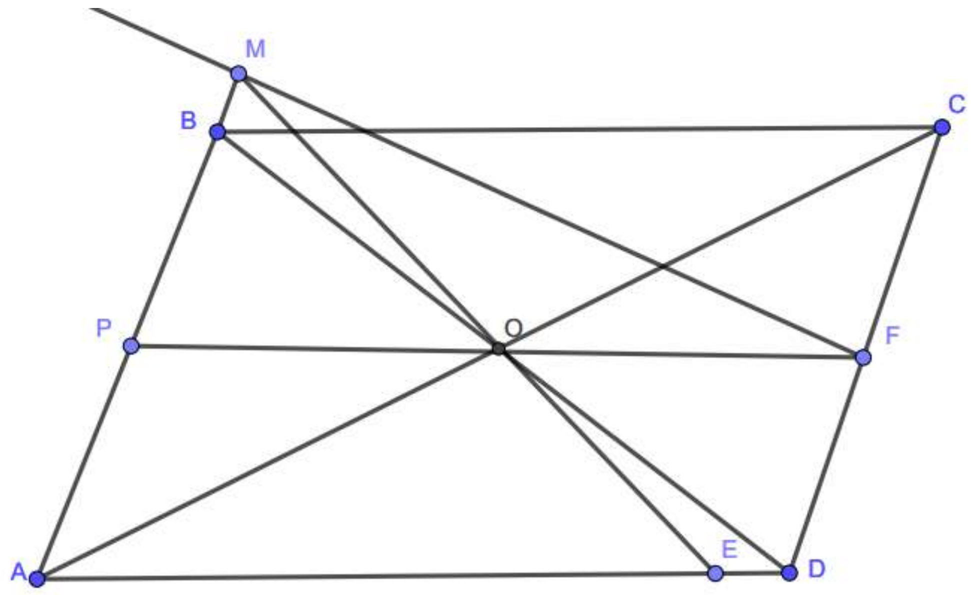
4. Լուծել $\frac{x+1}{y}+\frac{y+1}{x}=4$ հավասարումը, որտեղ x-ը և y-ը փոխադարձաբար պարզ բնական թվեր են:

Լուծում: $\frac{x+1}{y}+\frac{y+1}{x}=\frac{(x+1)x+y(y+1)}{xy} \Rightarrow y(y+1)\vdots x$ և $(x,y)=1 \Rightarrow y+1\vdots x$:

Նմանապես՝ $x+1\vdots y$, հետևաբար $\frac{x+1}{y},\frac{y+1}{x}\in N$, որտեղից՝ $\frac{x+1}{y}=1,\frac{y+1}{x}=3$ կամ $\frac{x+1}{y}=3,\frac{y+1}{x}=1$ կամ $\frac{x+1}{y}=\frac{y+1}{x}=2$, հետևաբար հավասարմանը բավարարող թվազույգերն են՝ $(1,1),(1,2),(2,1)$:

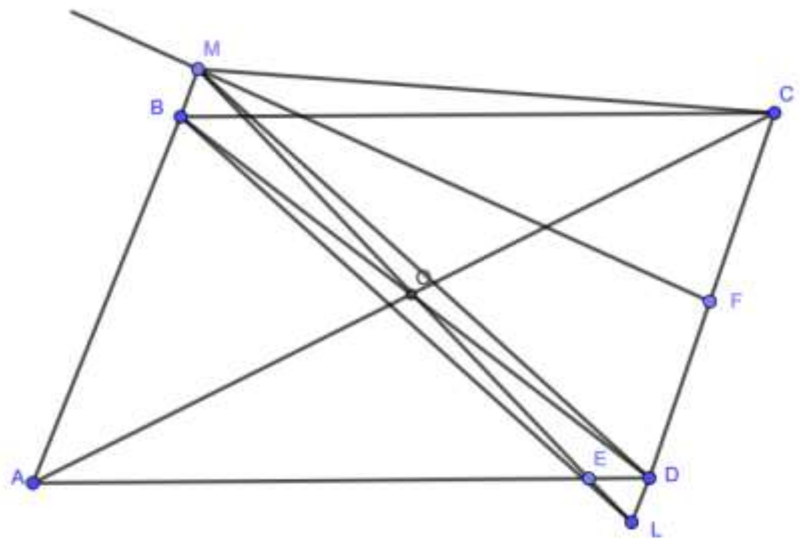
5. Դիցուք $ABCD$ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են O կետում, իսկ CD կողմի միջնուղղահայացը AB ուղիղը հատում է M կետում, ընդ որում B կետը գտնվում է A և M կետերի միջև: Դիցուք MO ուղիղը AD ուղիղը հատում է E կետում: Ապացուցել, որ $AE=EM$:

Լուծում 1:



Դիցուք O կետից AD ուղղին տարված զուգահեռը AB և CD հատվածները հատում է P և F կետերում: Ըստ Թալեսի թեորեմի P-ն և F-ը համապատասխանաբար AB և CD հատվածների միջնակետերն են, հետևաբար $PO=FO=\frac{AD}{2}$: $AB\,||\,CD$ և $ME\perp CD \Rightarrow \angle PMF=90^\circ \Rightarrow PO=OF=MO$ քանի, որ O-ն եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է, հետևաբար $\angle PMO=\angle MPO=\angle MAE \Rightarrow AM=ME$:

Լուծում 2:



Դիցուք L –ը M –ի համաչափն է O կետի նկատմամբ: Այդ դեպքում $BMDL$ քառանկյունը զուգահեռագիծ է, որտեղից $DL \| BM \| CD$, հետևաբար C, D, L կետերը գտնվում մի ուղղի վրա:
$MD = BL = MC$,հետևաբար $BMCL$ քառանկյունը հավասարասրուն սեղան է, որտեղից
$\angle AML = \angle MLD = \angle BCL = \angle MAD \Rightarrow AM = AE$

6. Գրատախտակին գրված են 2020 թվեր: Այդ թվերը կամայական ձևով բաժանել են զույգերի և հաշվել յուրաքանչյուր զույգի գումարը: Հայտնի է, որ կամայական բաժանման դեպքում ստացված 1010 գումարներից գոնե երկուսը հավասար են: Ամենաշատը քանի՞ զույգ առ զույգ տարբեր թիվ կարող է գրված լինել գրատախտակին:

Լուծում: Դիցուք գրատախտակին գրված տարբեր թվերի քանակը հավասար է A –ի և $A \geq 1010$:
Գրատախտակին գրված թվերը բաժանենք $B = \{a_1, a_2, \cdots a_{1010}\}$ և $C = \{a_{1011}, a_{1012}, \cdots a_{2020}\}$
բազմությունների, այնպես, որ $a_1 > a_2 > \cdots > a_{1010}$ և $a_{1011} \geq a_{1012} \geq \cdots \geq a_{2020}$: Այդ դեպքում
$a_1 + a_{1011} > a_2 + a_{1012} > \cdots > a_{1010} + a_{2020}$, այսինքն ստացված 1010 գումարները տարբեր են, հետևաբար
$A \leq 1009$:

Բերենք $A = 1009$–ին բավարարող օրինակ՝ $\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{1012}, 2, \cdots, 1008, 1009$: Այս թվերի կամայական բաժանման դեպքում կգտնվի երկու զույգ, որոնց գումարելիներից յուրաքանչյուրը 1 է, հետևաբար այդ զույգերի գումարը հավասար է 2-ի:

Ուշադրություն: Յուրաքանչյուր առաջադրանքի ճիշտ լուծումը գնահատվում է առավելագույնը 7 միավոր: