ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ 8-րդ ԴԱՍԱՐԱՆ

ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՓՈՒԼ 2020թ.

Առաջադրանքները և լուծումները

1) Պարզել, թե n բնական թվի ո՞ր արժեքների դեպքում $n! + 2020$ արտահայտության արժեքը բնական թվի խորանարդ է:

Լուծում: Երբ $n \geq 4$, ապա $n! + 2020$ բաժանվում է 4–ի, բայց չի բաժանվում 8–ի, հետևաբար $n! + 2020 \neq m^3$:

Երբ $n = 1, 2, 3$, ապա $n! + 2020 \neq m^3$ քանի, որ $12^3 < n! + 2020 < 13^3$:

2) Դիցուք S-ը բոլոր $n^2 + n + 1$ տեսքի բնական թվերի բազմությունն է, որտեղ n-ը բնական թիվ է: Ապացուցել, որ գոյություն ունեն անվերջ քանակությամբ $a \in S$ և $b \in S$ թվեր, որոնց համար $\frac{a}{b} \in S$:

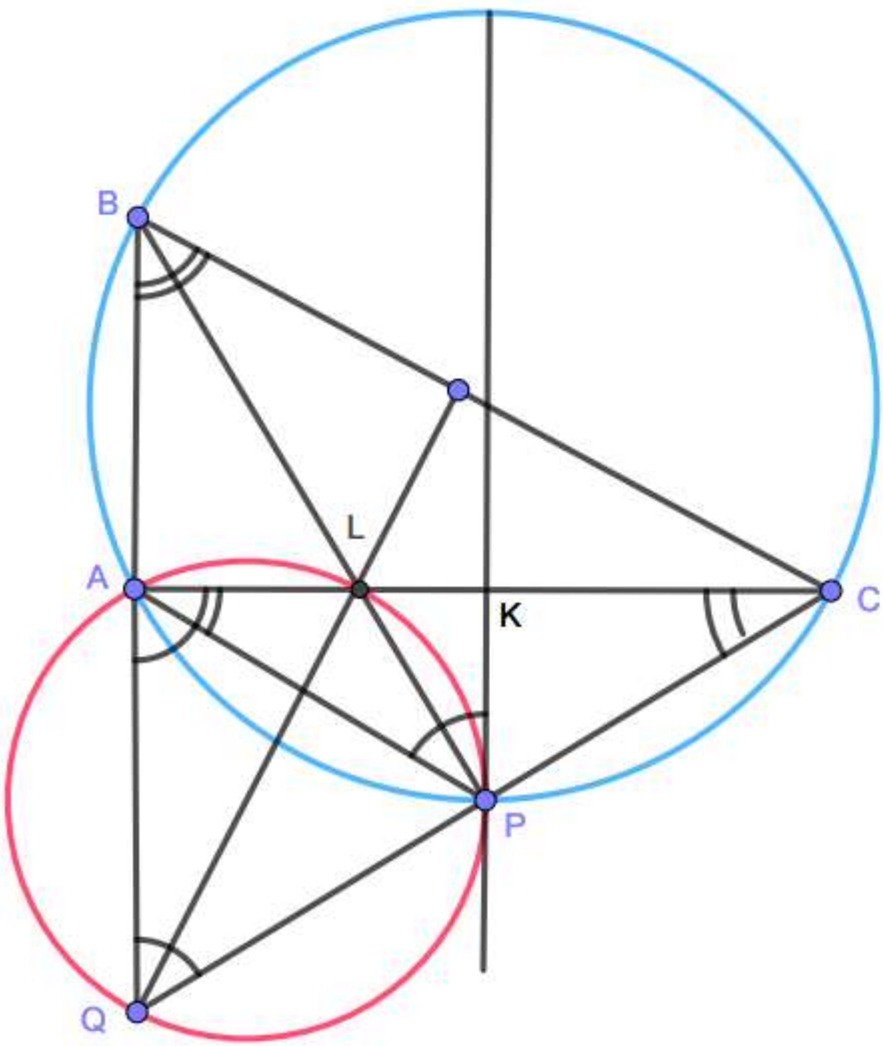
Լուծում: Գրենք S բազմությանը պատկանող մի քանի թվեր՝3,7,13,21,43,57,73,91,.... և նկատենք, որ $3 \cdot 7 = 21 \Rightarrow \left(1^2+1+1\right)\left(2^2+2+1\right) = 4^2+4+1$ և $13 \cdot 7 = 21 \Rightarrow \left(3^2+3+1\right)\left(2^2+2+1\right) = 9^2+9+1$, որտեղից կարելի է եզրակացնել, որ

$$n^4+n^2+1 = \left(n^2+n+1\right)\left(\left(n-1\right)^2+\left(n-1\right)+1\right) = \left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right) = \left(n^2+1\right)^2 - n^2 = n^4+n^2+1,$$

հետևաբար $a = n^4+n^2+1$ և $b = n^2+n+1$ տեսքի թվերը բավարարում են խնդրի պայմաններին:

3) Դիցուք ABC եռանկյան BL կիսորդի շարունակությունը և ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը հատվում են P կետում: Դիցուք ℓ–ը P կետով անցնող և AB ուղղին զուգահեռ ուղիղն է, իսկ A կետով անցնող և ℓ–ին P կետում շոշափող շրջանագիծը AB ուղիղը հատում է A–ից տարբեր Q կետում: Հայտնի է, որ Q, P և C կետերը գտնվում են մեկ ուղղի վրա: Ապացուցել, որ $QL \perp BC$:

Լուծում: Դիցուք l –ը և AC -ն հատվում են K կետում:



Այդ դեպքում $\angle QAP = \angle APK = \angle AQP \Rightarrow AP = QP$ և $\angle ACP = \angle PBA = \angle PBC = \angle CAP \Rightarrow AP = PC$, հետևաբար $AP = PC = QP$, որտեղից P –ն ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է, հետևաբար $\angle QAC = 90^\circ \Rightarrow \angle BAC = \angle BPC = 90^\circ$, հետևաբար $QL \perp BC$ քանի, որ եռանկյան բարձրությունները հատվում են մեկ կետում:

Ուշադրություն: Յուրաքանչյուր առաջադրանքի ճիշտ լուծումը գնահատվում է առավելագույնը 7 միավոր: