ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ 11-12-րդ ԴԱՍԱՐԱՆՆԵՐ

ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՓՈՒԼ 2020թ.

Օր 2-րդ

Առաջադրանքները և լուծումները

4. Դիցուք x-ը և y-ը բնական թվեր են: Գտնել $\frac{x+1}{y}+\frac{x}{y+1}$ արտահայտության բնական արժեքների բազմությունը:

Լուծում: $A=\frac{x+1}{y}+\frac{x}{y+1}=\frac{(x+1)(y+1)+xy}{y(y+1)}\Rightarrow x+1⋮y$ և $x⋮y+1\Rightarrow x+1=ay$ և $x=b(y+1)$

$\Rightarrow b(y+1)+1=ay\Rightarrow b+1⋮y\Rightarrow b+1=cy\Rightarrow x=(cy-1)(y+1)$:

Քանի, որ $x+1\geq y$ և $x+1\geq y\Rightarrow A\geq 2$:

$$A=\frac{(cy-1)(y+1)+1}{y}+\frac{(cy-1)(y+1)}{y+1}=2cy+c-2=c(2y+1)-2:$$

Եթե $A=2k+1\Rightarrow c(2y+1)=2k+3\Rightarrow c=1, y=k+1$:

Եթե $A=2k\Rightarrow c(2y+1)=2(k+1)\Rightarrow k+1\neq 2^l\Rightarrow A\neq 2^p-2$:

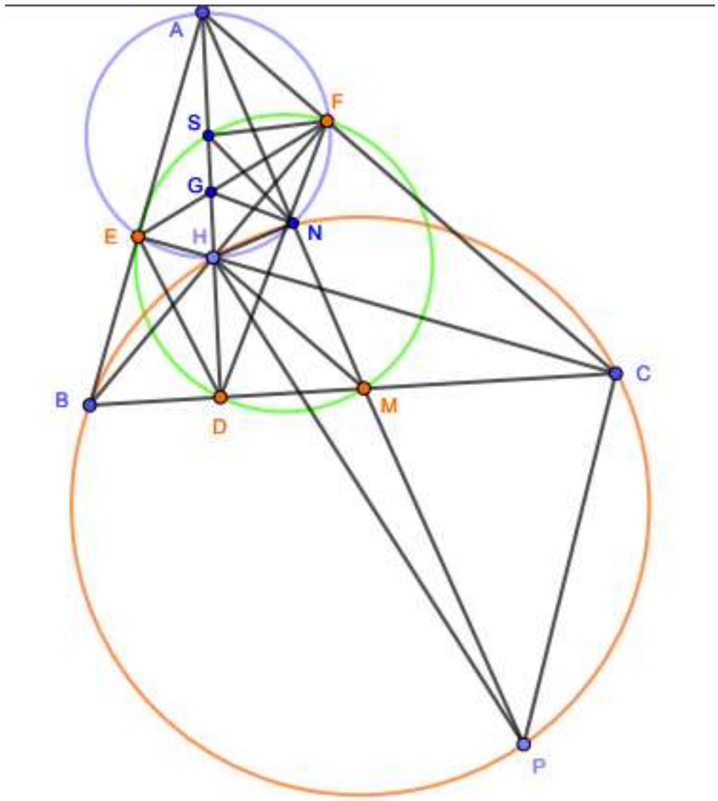
Եթե $k+1\neq 2^l\Rightarrow k+1=2^m(2q+1)\Rightarrow c(2y+1)=2^{m+1}(2q+1)\Rightarrow c=2^{m+1}, k=q$:

Հետևաբար՝ $A=N\setminus\{1; 2^p-2; p\in N\}$:

5. Դիցուք AD, BF, CE հատվածները ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրություններն են, M-ը BC կողմի միջնակետը, H-ը բարձրությունների հատման կետը, S-ը AH հատվածի միջնակետը, G-ն FE և AH հատվածների հատման կետը, իսկ N-ը AM միջնագծի և BCH եռանկյանն արտագծած շրջանագծի հատման կետն է: Ապացուցել, որ $\angle HMA=\angle GNS$:

Լուծում: A-ն BHC եռանկյան օրթոկենտրոնն է, ուստի նրա համաչափը՝ P-ն պատկանում է BCH եռանկյան արտագծած շրջանագծին, որտեղից $PC \perp AB\Rightarrow\angle PCE=\angle AEC=90^\circ=\angle HNP=\angle HNA$, հետևաբար E, H, N, F, A կետերը գտնվում են AH տրամագծով և S կենտրոնով շրջանագծի վրա:

Հայտնի է, որ D, F, S, E, M կետերով անցնում է շրջանագիծ(Էյլերի շրջանագիծ). հետևաբար $\angle FDH=\angle HDE=\angle SFE$, որտեղից $SN^2=SF^2=SG\cdot SD$, հետևաբար $\angle SNG=\angle HDN=\angle HMN$, քանի, որ $DHMN$ քառանկյանը կարելի արտագծել շրջանագիծ:



6. Գտնել S դրական թվի ամենամեծ հնարավոր արժեքը, որ [0,1] միջակայքի ցանկացած թվերի հաջորդականություն (պարտադիր չէ բոլորը լինեն տարբեր), որի էլեմենտների գումարը չի գերազանցում S-ը, հնարավոր է բաժանել երկու խմբի այնպես, որ յուրաքանչյուր խմբում եղած թվերի գումարը չի գերազանցում 9-ը:

Լուծում: Ցույց տանք, որ S -ը 17.1-ից մեծ չի կարող լինել: Դիտարկենք 19 հատ իրար հավասար թվեր, բոլորն էլ հավասար $0.9+\varepsilon$, որտեղ ε-ը փոքր դրական թիվ է: Խմբերից որևէ մեկը պարունակելու է տաս էլեմենտ, հետևաբար նրանում եղած թվերի գումարը կլինի 9-ից մեծ: Եթե 17.1-ից մեծ լինի S -ը, ապա այդպիսի ε կգտնենք:
Այժմ ցույց տանք, որ 17.1 բավարարում է խնդրի պայմանին: Տրված n հատ թվերը դասավորենք նվազման կարգով՝

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n:$$

Այժմ խմբերը սկսենք ձևավորել հետևյալ կերպ: Սկզբում երկու խմբերն էլ դատարկ են, իսկ ամեն քայլի հերթական թիվը դնենք այն խմբում, որտեղ եղած թվերի գումարը փոքրագույնն է: Դիցուք հնարավոր չի լինում տեղավորել x_k թիվը:

Այդ պահին $x_1,\dots,x_{k-1}$ թվերն արդեն դասավորված են և դասավորված բոլոր թվերի գումարը չի գերազանցում $S-x_k$ -ն: Հետևաբար խմբերից որևէ մեկում տեղավորված թվերի գումարը չի գերազանցում $(S-x_k)/2$ -ը: Հետևաբար, քանի որ հնարավոր չէ տեղավորել հերթական թիվը, ուրեմն

$$x_k+(S-x_k)/2>9:$$

Քանի որ S=17.1, ստանում ենք, որ $x_k > 9/10$: Դիտարկենք երկու դեպք:

Դիցուք $k \geq 19$: Այդ դեպքում $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0.9$, որտեղից ստացվում է, որ $S > 19 \cdot 0.9 = 17.1$, ինչը հակասություն է:

Դիցուք $k \leq 18$: Այդ դեպքում արդեն դասավորված ոչ ավել քան 17 թվերից որևէ խմբում կլինի առավելագույնը 8 հատ, հետևաբար այդ խմբում եղած թվերի գումարը կլինի ոչ ավել քան 8-ը, ուստի x_k հնարավոր կլինի ավելացնել: Կրկին եկանք հակասության:

Ուշադրություն: Յուրաքանչյուր առաջադրանքի ճիշտ լուծումը գնահատվում է առավելագույնը 7 միավոր: