ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ 11-12-րդ ԴԱՍԱՐԱՆՆԵՐ
ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՓՈՒԼ 2020թ.
<u>Առաջադրանքները և լուծումները</u>

1) Պարզել, թե m և n բնական թվերի ո՞ր արժեքների դեպքում $m!+n!+2020$ արտահայտության արժեքը բնական թվի խորանարդ է:

Լուծում: Դիցուք $n \geq m \geq 4$: Այդ դեպքում $A=n!+m!+2020$ բաժանվում է 4-ի և չի բաժանվում 8-ի, հետևաբար $A \neq k^3$, որտեղից $m \leq 3$:

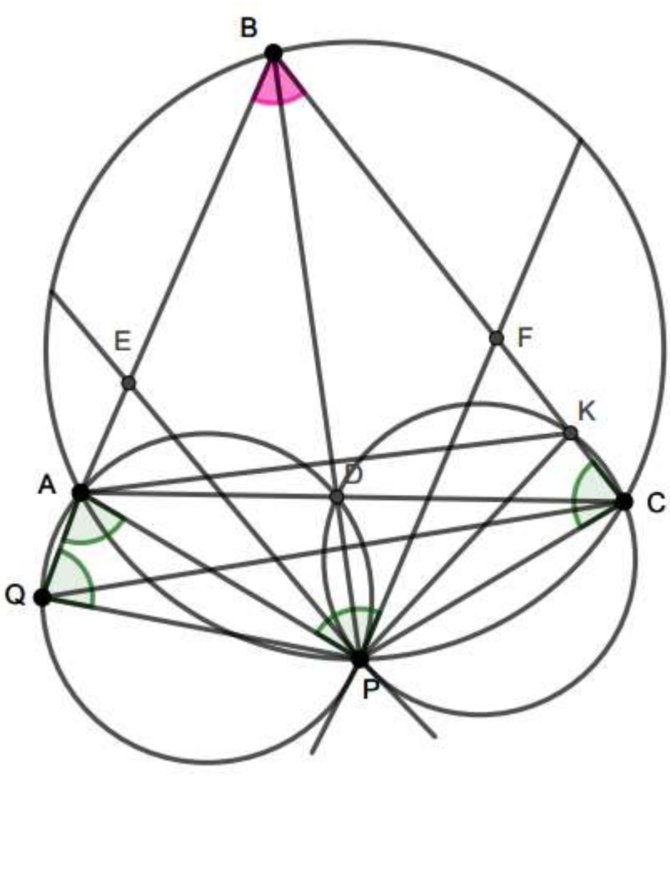
Երբ $m=3 \Rightarrow A=n!+2026$, որը $n \geq 4$ դեպքում բաժանվում է 4-ի և չի բաժանվում 8-ի, հետևաբար $A \neq k^3 \Rightarrow n \leq 3$, որի դեպքում $12^3 < A < 13^3$, հետևաբար $A \neq k^3$:

Նմանապես, երբ $m=2$:

Երբ $m=1 \Rightarrow A=n!+2021$, որը $n \geq 6$-ի դեպքում A-ն 9–ի վրա բաժանելիս տալիս է 5 մնացորդ, իսկ բնական թվի խորանարդը՝ 0, 1 կամ 8 մնացորդ, հետևաբար՝ $n \leq 5$, որի դեպքում $12^3 < A < 13^3$, հետևաբար $A \neq k^3$:

2) Դիցուք P-ն ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի B գագաթը չպարունակող AC աղեղի միջնակետն է: Դիցուք ℓ_1 –ը P կետով անցնող և AB ուղղին զուգահեռ ուղիղն է, իսկ ℓ_2 –ը P կետով անցնող և BC ուղղին զուգահեռ ուղիղն է: Դիցուք A կետով անցնող և ℓ_1 -ին P կետում շոշափող շրջանագիծը AB ուղիղը հատում է A–ից տարբեր Q կետում, իսկ C կետով անցնող և ℓ_2 -ին P կետում շոշափող շրջանագիծը BC ուղիղը հատում է C–ից տարբեր K կետում: Ապացուցել, որ A, Q, C և K կետերը գտնվում են մեկ շրջանագծի վրա:

Լուծում 1: Դիցուք l_1–ը և BC-ն հատվում են F կետում:



Այդ դեպքում $\angle QAP = \angle APF = \angle AQP \Rightarrow AP = QP$ և $\angle ACP = \angle PBA = \angle PBC = \angle CAP \Rightarrow AP = PC$, հետևաբար $AP = PC = QP$:

$\angle QPB = 180^\circ - \angle BQP - \angle QBP = 180^\circ - \angle QAP - \angle PBC = 180^\circ - \angle BCP - \angle PBC = \angle BPC$: Քանի, որ $\angle BPC = \angle QBP, QP = PC, BP = BP \Rightarrow \triangle BQP = \triangle BPC \Rightarrow BQ = BC \Rightarrow BP \perp QC$:

Նմանապես $BP \perp AK \Rightarrow AK \parallel QC$ և $AQ = KC$, հետևաբար քառանկյունը հավասարասրուն սեղան է, հետևաբար այն ներգծելի է:

Լուծում 2: Քանի, որ $\angle ADB = \angle DBC + \angle ACB = \angle ABD + \angle APB = \angle QAP = \angle APF = \angle AQP$, հետևաբար D –ն պատկանում է A կետով անցնող և l_1-ին P կետում շոշափող շրջանագծին : Նմանապես D–ն պատկանում է C կետով անցնող և l_2-ին P կետում շոշափող շրջանագծին, հետևաբար $BA \cdot BQ = BD \cdot BP = BK \cdot KC$, որտեղից A, Q, C, K կետերով անցնում է շրջանագիծ:

3) Դիցուք $m \times n$ (m տող և n սյուն) չափանի աղյուսակի յուրաքանչյուր վանդակում գրել են 1, 50, 100 թվերից որևէ մեկը: Գտնել m -ի և n–ի բոլոր հնարավոր արժեքները, եթե հայտնի է, որ միաժամանակ բավարարվում են հետևյալ երկու պայմանները.

ա) Աղյուսակի ցանկացած երկու տողերի համար դրանցում գրված թվերի գումարներն իրար հավասար են:

բ) Աղյուսակի ցանկացած երկու տողերի համար դրանցում գրված թվերի քառակուսիների գումարներն իրար հավասար չեն:

Լուծում: Ապացուցենք, որ եթե երկու տողերում գրված թվերի քառակուսիների գումարն իրար հավասար են, ապա որևէ վերադասավորումից հետո այդ տողերն իրար հետ կհամընկնեն: Դիցուք մի տողում կա x, y, z հատ $1,50,100$, իսկ մյուս տողում կա m, n, k հատ $1,50,100$: Այդ դեպքում

$$\begin{cases} x + y + z = m + n + k \\ x + 50y + 100z = m + 50n + 100k \\ x + 2500y + 10000z = m + 2500n + 10000k \end{cases}$$

Կամ այլ կերպ

$$\begin{cases} (x-m) + (y-n) + (z-k) = 0 \\ (x-m) + 50(y-n) + 100(z-k) = 0 \\ (x-m) + 2500(y-n) + 10000(z-k) = 0 \end{cases} :$$

Լուծելով այս համակարգը կստանանք, որ $x - m = y - n = z - k = 0$:

Եթե որևէ երկու տողերում չկա 1, 50, 100 թվերից որևէ մեկը և տեղի ունի ա) պայմանը, ապա տեղի չունի բ) պայմանը: Հետևաբար ցանկացած երկու տողում միասին կան բոլոր 3 թվերը: Դիտարկենք այն տողը, որում կա առավելագույն քանակությամբ 50: Եթե այդ տողում կա 1, ապա մնացած բոլոր տողերում նույնպես կա 1, իսկ եթե այդ տողում կա 100, ապա մնացած բոլոր տողերում նույնպես կա 100: Ջնջելով այդ բոլոր թվերը խնդրի պայմանները չեն փոխվի և արդյունքում կունենանք տող, որում գրված են միայն 50 թվերը՝ ընդհանուր առմամբ d հատ: Դիտարկենք մեկ այլ տող: Դիցուք այդ տողում 50-ների քանակը a է, 1-երի քանակը՝ b : Այդ դեպքում $50d = 50a + b + 100(d - a - b)$, որտեղից

$$50(d - a) = 99b:$$

Քանի որ կա միայն 50-երից բաղկացած տողից և ս $m-1$ տող, ապա այս հավասարումը պետք է ունենա $b=0$-ից տարբեր $m-1$ հատ լուծում: Նաև նկատենք, որ b-ն բաժանվում է 50-ի: Հետևաբար որևէ տողում կա որևէ տողում կա առնվազն $50(m-1)$ հատ 1: Հետևաբար կլինի առնվազն $49(m-1)$ հատ 100, ուստի կլինի $99(m-1)$ հատ թիվ: Այսպիսով $n \geq 99(m-1)$: Այժմ ցույց տանք, որ ցանկացած $m \geq 2$ և $n \geq 99(m-1)$ թվերի համար նման աղյուսակ գոյություն ունի:

հետևաբար $a=99$ և $b=50$:

Բերենք օրինակ

Տողի համար	1-երի քանակ	50-երի քանակ	100-երի քանակ
1	0	n	0
2	50	n-99	49
3	100	n-198	98
…	….	……	……
m-1	50(m-2)	n-99(m-2)	49(m-2)
m	50(m-1)	n-99(m-1)	49(m-1)

Ուշադրություն: Յուրաքանչյուր առաջադրանքի ճիշտ լուծումը գնահատվում է առավելագույնը 7 միավոր: