

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ 10-րդ ԴԱՍԱՐԱՆ

ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՓՈԻԼ 2020թ.

Օր 2-րդ

Առաջադրանքները և լուծումները

4. Լուծել  $\frac{x+1}{y} + \frac{x}{y+1} = 2020$  հավասարումը, որտեղ  $x$ -ը և  $y$ -ը բնական թվեր են:

**Լուծում:**  $\frac{x+1}{y} + \frac{x}{y+1} = \frac{(x+1)(y+1)+xy}{y(y+1)} \Rightarrow x+1:y$  և  $x:y+1 \Rightarrow x+1=ay$  և  $x=b(y+1)$

$\Rightarrow b(y+1)+1=ay \Rightarrow b+1:y \Rightarrow b+1=cy \Rightarrow x=(cy-1)(y+1):$

$2020 = \frac{(cy-1)(y+1)+1}{y} + \frac{(cy-1)(y+1)}{y+1} = 2cy+c-2 = c(2y+1)-2 \Rightarrow c(2y+1) = 2022$

$\Rightarrow c = 2, y = 505, x = 1009 \cdot 506, c = 6, y = 112, x = 671 \cdot 113, c = 2 \cdot 337, y = 1, x = 673 \cdot 2$

5. Դիցուք  $H$ -ը  $ABC$  սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունների հատման կետն է, իսկ  $R$  կենտրոնով և  $A, B, H$  կետերով անցնող շրջանագիծը  $BC$  հատվածը հատում է  $D$  ( $D \neq B$ ) կետում: Դիցուք  $P$ -ն  $DH$  ուղղի և  $AC$  հատվածի հատման կետն է, իսկ  $Q$ -ն  $ADP$  եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Ապացուցել, որ  $B, D, Q, R$  կետերը գտնվում են մեկ շրջանագծի վրա:

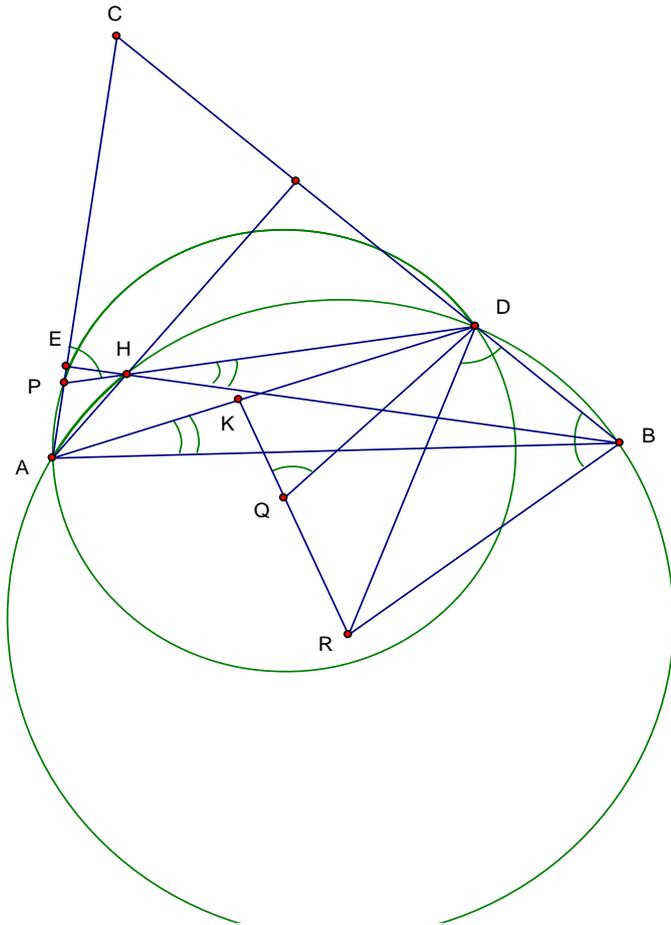
**Լուծում:**  $H$ -ը  $ABC$  սուրանկյուն եռանկյան օրթոկենտրոնն է, իսկ  $\omega$ -ն  $R$  կենտրոնով և  $A, B, H$  կետերով անցնող շրջանագիծն է, որը  $BC$  հատվածը հատում է  $D$  ( $D \neq B$ ) կետում: Դիցուք  $P$ -ն  $DH$  ուղղի և  $AC$  հատվածի հատման կետն է, իսկ  $Q$ -ն  $ADP$  եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Ապացուցեք, որ  $B, D, Q, R$  կետերով անցնում է շրջանագիծ:

Ապացույց:  $Q$  և  $R$  կետերը գտնվում են  $AD$  հատվածի միջնուղղահայացի վրա: Դիցուք

$\angle DRB = 2\alpha \Rightarrow \angle RBD = 90^\circ - \alpha$  և

$\angle DAB = \angle DHB = \angle EHP = \alpha \Rightarrow \angle EPH = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle APH = 90^\circ + \alpha \Rightarrow$

$\cup AD = 180^\circ + 2\alpha \Rightarrow \cup APD = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle KQD = 90^\circ - \alpha$



Ստացվեց, որ  $\angle KQD = \angle DBR = 90^\circ - \alpha$ , հետևաբար  $Q, D, R, B$  կետերով անցնում է շրջանագիծ:

6. Տրված  $n \times n$  չափանի աղյուսակը կոչվում է հայկական, եթե նրա յուրաքանչյուր վանդակում գրված է 0 և 1 թվերից որևէ մեկը: Հայկական աղյուսակի հետ կարելի է կատարել հետևյալ գործողությունը. ընտրել աղյուսակի որևէ  $2 \times 2$  չափի քառակուսի և նրանում եղած 1-երը փոխարինել 0-ներով, իսկ 0-ները՝ 1-երով: Երկու  $U$  և  $F$  հայկական աղյուսակներ կոչվում են նման, եթե հնարավոր է վերջավոր քանակությամբ թույլատրելի գործողությունների միջոցով  $U$  աղյուսակից ստանալ  $F$  աղյուսակը: Պարզել, թե առավելագույնը քանի՞ հայկական աղյուսակ է հնարավոր ընտրել, որ նրանցից յուրաքանչյուր երկուսն իրար նման չլինեն:

**Լուծում:**  $n \times n$  չափի աղյուսակը անվանենք բերված տեսքի, եթե վերջին սյունը և վերջին տողը ջնջելուց հետո ստացվում է 0-ական աղյուսակ (այսինքն ստացված աղյուսակի բոլոր վանդակներում գրված է 0): Նկատենք, որ յուրաքանչյուր նախապես տրված աղյուսակ կարելի է թույլատրելի գործողությունների միջոցով դարձնել բերված տեսքի աղյուսակ: Իրոք, դրա համար կարող ենք սկսել առաջին տողից: Եթե առաջին վանդակում գրված է 1, ապա փոխարինում ենք վերին ձախ անկյունի  $2 \times 2$  չափի աղյուսակի թվերը, որից հետո առաջին տողի առաջին թիվը վերածվում է 0-ի: Այնուհետև դիտարկում ենք առաջին տողի երկրորդ թիվը՝  $c$ : Եթե այն 1 է, ապա ընտրում ենք այն  $2 \times 2$  չափի աղյուսակը, որի համար  $c$ -ն գտնվում է վերին ձախ անկյունում: Այդ աղյուսակի թվերը փոխարինելուց հետո  $c$ -ն կվերածվի 0-ի: Նշենք, որ այդ դեպքում չի փոխվի առաջին տողի առաջին թիվը: Այսպես շարունակելով կարող ենք 0-ի վերածել առաջին տողի բոլոր

Թվերը Բացի առաջին տողի վերջին թվից: Նույն կերպ կվարվենք նաև երկրորդ տողի հետ և այսպես շարունակ: Արդյունքում կստանանք բերված տեսքի աղյուսակ:

Այժմ ապացուցենք, որ ցանկացած երկու իրարից տարբեր բերված տեսքի Ա և Բ աղյուսակներն իրար նման չեն: Նկատենք, որ յուրաքանչյուր թույլատրելի գործողությունից հետո աղյուսակի կամայական տողի (սյան) թվերի գումարի գույգությունը չի փոխվում: Այստեղից բխում է, որ եթե Ա և Բ բերված տեսքի աղյուսակներն իրար նման են, ապա նրանց վերջին տողի և վերջին սյան տարրերը համապատասխանաբար իրար հավասար են:

Այսպիսով իրար ոչ նման աղյուսակների մաքսիմալ քանակը հավասար է բերված տեսքի աղյուսակների քանակին:

$$\text{Պատ. } 2^{2n-1}:$$

**Ուշադրություն:** Յուրաքանչյուր առաջադրանքի ճիշտ լուծումը գնահատվում է առավելագույնը **7** միավոր: