ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ 10-րդ ԴԱՍԱՐԱՆ

ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՓՈՒԼ 2020թ.

<u>Առաջադրանքները և լուծումները</u>

1) Պարզել, թե m և n բնական թվերի ո՞ր արժեքների դեպքում m!+n!+2020 արտահայտության արժեքը բնական թվի խորանարդ է:

Լուծում: Դիցուք $n \geq m \geq 4$: Այդ դեպքում $A = n! + m! + 2020$ բաժանվում է 4-ի և չի բաժանվում 8-ի, հետևաբար $A \neq k^3$, որտեղից $m \leq 3$:

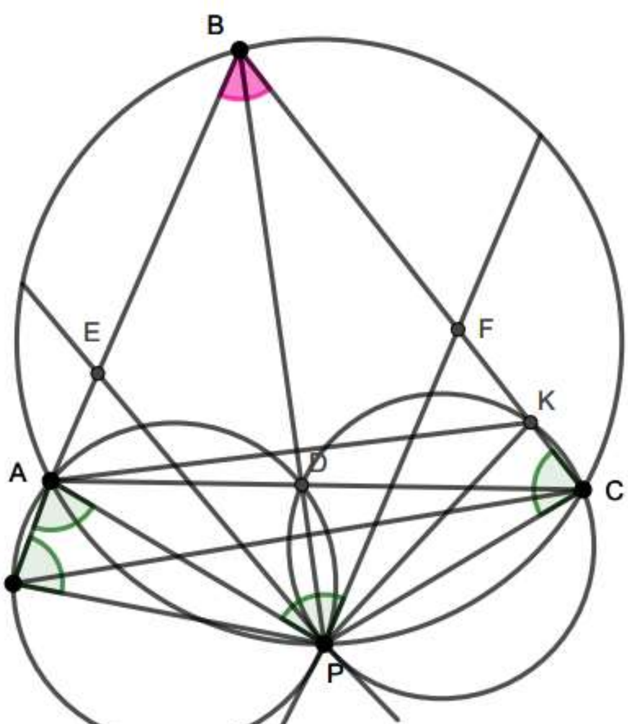
երբ $m = 3 \Rightarrow A = n! + 2026$, որը $n \geq 4$ դեպքում բաժանվում է 4-ի և չի բաժանվում 8-ի, հետևաբար $A \neq k^3 \Rightarrow n \leq 3$, որի դեպքում $12^3 < A < 13^3$, հետևաբար $A \neq k^3$:

Նմանապես, երբ $m = 2$:

երբ $m = 1 \Rightarrow A = n! + 2021$, որը $n \geq 6$-ի դեպքում A-ն 9–ի վրա բաժանելիս տալիս է 5 մնացորդ, իսկ բնական թվի խորանարդը՝ 0, 1 կամ 8 մնացորդ, հետևաբար՝ $n \leq 5$, որի դեպքում $12^3 < A < 13^3$, հետևաբար $A \neq k^3$:

2) Դիցուք P-ն ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի B գագաթը չպարունակող AC աղեղի միջնակետն է: Դիցուք ℓ_1 –ը P կետով անցնող և AB ուղղին զուգահեռ ուղիղն է, իսկ ℓ_2 –ը P կետով անցնող և BC ուղղին զուգահեռ ուղիղն է: Դիցուք A կետով անցնող և ℓ_1 -ին P կետում շոշափող շրջանագիծը AB ուղիղը հատում է A–ից տարբեր Q կետում, իսկ C կետով անցնող և ℓ_2 -ին P կետում շոշափող շրջանագիծը BC ուղիղը հատում է C–ից տարբեր K կետում: Ապացուցել, որ $AK \parallel QC$:

Լուծում: Դիցուք l_1–ը և BC-ն հատվում են F կետում:



Այդ դեպքում $\angle QAP = \angle APF = \angle AQP \Rightarrow AP = QP$ և $\angle ACP = \angle PBA = \angle PBC = \angle CAP \Rightarrow AP = PC$, հետևաբար $AP = PC = QP$:

$\angle QPB = 180^\circ - \angle BQP - \angle QBP = 180^\circ - \angle QAP - \angle PBC = 180^\circ - \angle BCP - \angle PBC = \angle BPC$: Քանի, որ $\angle BPC = \angle QBP, QP = PC, BP = BP \Rightarrow \triangle BQP = \triangle BPC \Rightarrow BQ = BC \Rightarrow BP \perp QC$:

Նմանապես որ $BP \perp AK \Rightarrow AK \parallel QC$:

3) Դիցուք $n\times\ n$ չափանի աղյուսակի յուրաքանչյուր վանդակում գրել են 1, 50, 100 թվերից որևէ մեկը: Գտնել n–ի բոլոր հնարավոր արժեքները, եթե հայտնի է, որ միաժամանակ բավարարվում են հետևյալ երկու պայմանները.

ա) Աղյուսակի ցանկացած երկու տողերի համար դրանցում գրված թվերի գումարներն իրար հավասար են:

բ) Գոյություն ունեն երկու տողեր, որոնցում գրված թվերի արտադրյալներն իրար հավասար չեն:

Լուծում: Ապացուցենք, որ եթե երկու տողերում գրված թվերի արտադրյալներն իրար հավասար են, ապա որոշակի վերադասավորումից հետո այդ տողերն իրար հետ կհամընկնեն: Դիցուք մի տողում կա x, y, z հատ 1,50,100, իսկ մյուս տողում կա m, n, k հատ 1,50,100: Այդ դեպքում

$$1^x\cdot 50^y\cdot 100^z=1^m\cdot 50^n\cdot 100^k:$$

Բերելով պարզ թվերի ցուցիչների կստանանք, որ

$$2^{y+2z}\cdot 5^{2y+2z}=2^{n+2k}\cdot 5^{2n+2k}:$$

Այստեղից ստացվում է, որ $y=n$ և $z=k$: Քանի որ $x+y+z=m+n+k$, ուստի $x=m$: Հետևաբար յուրաքանչյուր թվանշանից երկու տողում էլ կան հավասար քանակությամբ: Այսինքն, գոյություն ունեն երկու տողեր, որոնցում գրված թվերը որոշակի վերադասավորությունից հետո չեն համընկնի:

Եթե 1, 50, 100 որևէ մեկը գրված չէ և տեղի ունի բ) պայմանը, ապա տեղի չունի ա) պայմանը: Վերցնենք այն երկու տողերը, որոնցում գրված թվերի կամայական տեղափոխությունից այդ տողերը չեն համընկնում և գտնենք այդ տողերի վանդակների հնարավոր փոքրագույն քանակը: Եթե այդ տողերից մեկում կա թիվ, որը կա մյուս տողում, ապա այդ թվերը կարող ենք անտեսել, հետևաբար տողերից մեկում գրված է 50-ը, իսկ մյուս տողում՝ 1 և 100 քանի, որ հակառակ դեպքում տողերից մեկում գրված թվերի գումարը մեծ կամ փոքր կլինի մյուսում գրված թվերի գումարից: Ենթադրենք տողերից մեկում գրված 50-ների քանակը a է, իսկ մյուսում 1-երի քանակը՝ b : Այդ դեպքում $50a=b+100(a-b)\Rightarrow 99b=50a$, հետևաբար $a=99$ և $b=50$:

Բերենք օրինակ

50	50	....	50	50	50
1	...	1	100	...	100

Աղյուսակ 1:

Աղյուսակի առաջին տողում գրված է 99 հատ 50, իսկ երկրորդ տողում 50 հատ 1 և 49 հատ 100:

$n\times n$ չափի աղյուսակը ստացվում է աղյուսակ 1-ից համապատասխան քանակությամբ 50-ներ ավելացնելով, հետևաբար $n\geq 99$:

50	50	...	50	50	50
1	...	1	100	...	100
50	...				50
...	50	...			50
...	50	...			50
50	...				50

Ուշադրություն: Յուրաքանչյուր առաջադրանքի ճիշտ լուծումը գնահատվում է առավելագույնը 7 միավոր: