

IX դասարան, առաջին օր

1) Դիցուք $a, b, c > 0$ և $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$: Ապացուցեք, որ $a + bc \leq 2$:

Լուծում 1: Քանի, որ $3 \geq a^2 + b^2 + c^2 > b^2 + c^2 \geq 2bc > 4 \Rightarrow bc \leq 2$ (+3 միավոր)

$$a + bc \leq 2 \Leftrightarrow a^2 \leq (2 - bc)^2 \Leftrightarrow 3 - b^2 - c^2 \leq (2 - bc)^2 \Leftrightarrow (1 - bc)^2 + (b - c)^2 \geq 0 : (+4 \text{ միավոր})$$

Լուծում 2:

$$a + bc - 2 \leq a + \frac{b^2 + c^2}{2} - 2 \leq a + \frac{3 - a^2}{2} - 2 = -\frac{(a - 1)^2}{2} \leq 0 :$$

Լուծում 3:

$$a + bc = a \cdot 1 + bc \leq \frac{a^2 + 1}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} \leq \frac{b^2 + c^2 + a^2 + 1}{2} = 2 :$$

Չափանիշ:

$$1) \quad bc \leq \frac{b^2 + c^2}{2} \quad (+2 \text{ միավոր})$$

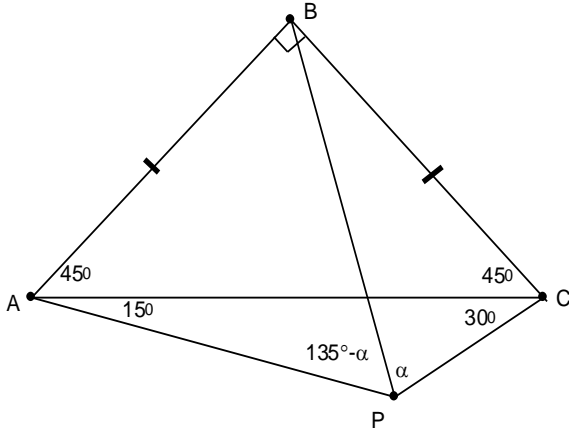
2) Խնդիրը ավարտել է: (+5 միավոր)

Դիտողություն 1: Եթե տրվել է որևէ գնահատական: (1 միավոր)

Դիտողություն 2: Եթե որևէ ձևով օգտագործվել է $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$ պայմանը: (1 միավոր)

2) ABC հավասարասրուն ուղղանկյուն ($\angle B = 90^\circ$) եռանկյունուց դուրս վերցված է P կետն այնպես, որ $\angle PAC = 15^\circ$, $\angle PCA = 30^\circ$: Գտեք APB և BPC անկյունները:

Լուծում 1: Նշանակենք. $\angle BPC = \alpha$: Այդ դեպքում $\angle APB = 135^\circ - \alpha$:



Եթե $BC > BP$, ապա $\triangle PBC$ -ից $\alpha > 75^\circ$, (1 միավոր) հետևաբար $135^\circ - \alpha < 60^\circ$:

(+2 միավոր)

Այդ դեպքում $\triangle BPA$ -ից $BP > BA$: Ուստի $BC > BP > BA$ ինչը հնարավոր չէ:

(+1 միավոր)

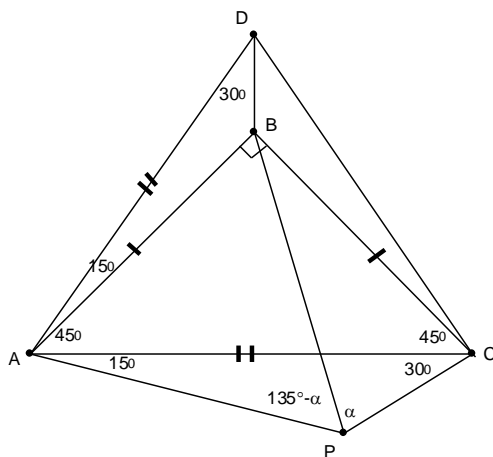
Նմանապես, երբ $\alpha < 75^\circ$, ապա $\triangle PBC$ -ից $BC < BP$: Այդ դեպքում $\triangle BPA$ -ից $BP < BA$:

Ուստի $BC < BP < BA$ ինչը հնարավոր չէ:

(+2 միավոր)

Մնում է, որ $\alpha = 75^\circ$: Այսպիսով $\angle BPC = 75^\circ$, $\angle APB = 60^\circ$: (+2 միավոր)

Լուծում 2:



Կառուցենք ADC հավասարակողմ եռանկյունը:

(+2 միավոր)

Այդ դեպքում B և D կետերը գտնվում են AC -ի միջնուղղահայացի վրա և $\angle DAB = 15^\circ$, $\angle ADB = 30^\circ$: (+1 միավոր)

Քանի որ $AD = AC$ և $\angle DAB = \angle CPA$, $\angle ADB = \angle ACP$, ապա $\triangle DAB = \triangle APC$, (+2 միավոր)

որտեղից՝ $AP = AB$ և քանի որ $\angle BAP = 60^\circ$, ապա $\triangle ABP$ -ն հավասարակողմ է: Այսպիսով $\angle APB = 60^\circ$, $\angle BPC = 75^\circ$: (+2 միավոր)

Դիտողություն: Եթե կատարվել է որևէ օժանդակ կառուցում: (1 միավոր)

