Մաթեմատիկա - մարզային փուլ, **9-րդ դասարան**

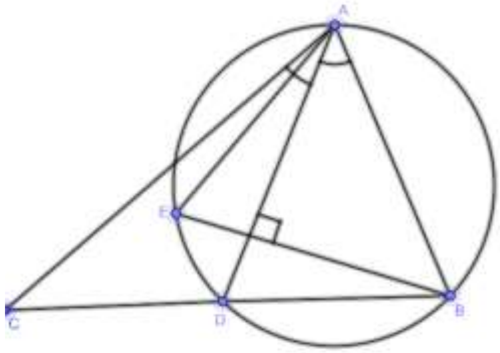
Տևողությունը – 180րոպե

1. Գտնել փոքրագույն x բնական թիվը այնպես, որի համար $\frac{3x+9}{8}, \frac{3x+10}{9}, \frac{3x+11}{10}, \ldots \frac{3x+99}{98}, \frac{3x+100}{99}$ արտահայտությունները անկրճատելի կոտորակներ են:

Լուծում: Քանի որ $\frac{3x+9}{8}$ կոտորակն անկրճատելի է, ուստի անկրճատելի է նաև $\frac{3x+9}{8} - 1 = \frac{3x+1}{8}$ կոտորակը: Հանգունորեն անկրճատելի են , $\frac{3x+1}{9}, \frac{3x+1}{10}, \ldots \frac{3x+1}{98}, \frac{3x+1}{99}$ կոտորակները, ինչը նշանակում է, որ , $3x + 1$ թիվն փոխադարձաբար պարզ է 8-ից մինչև 99 բոլոր բնական թվերի հետ: Նկատենք, որ 2-ից մինչև 7 բնական թվերն այդպիսի հատկություն չունեն, իսկ 99-ից մեծ ամենափոքր $3x + 1$ տեսքի բնական թիվը 100-ը չի բավարարում այդ պահանջին իսկ 103-ը բավարարում է: Այսպիսով $3x + 1 = 103$ և $x = 34$:

2. Դիցուք AD-ն ABC $(AC > AB)$ սուրանկյուն եռանկյան կիսորդն է: Դիցուք B կետով անցնող և AD-ին ուղղահայաց ուղիղը ABD եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը հատում է B-ից տարբեր E կետում: Ապացուցել, որ ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնը, E և A կետերը գտնվում են մեկ ուղղի վրա:

Լուծում: Դիցուք $\angle CAD = \angle DAB = \alpha$ և $\angle CBA = \beta$: Այդ դեպքում $\angle EAD = \angle DBE = \beta - (90^\circ - \alpha) = \alpha + \beta - 90^\circ$, որտեղից $\angle CAE = \alpha - (\alpha + \beta - 90^\circ) = 90^\circ - \beta$;



Դիցուք O-ն ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Այդ դեպքում $\angle COA = 2\beta$, հետևաբար $\angle OCA = \angle OAC = 90^\circ - \beta$, որտեղից A, E, O կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա:

Տևողությունը – 180րոպե

3. Դիցուք a, b թվերը բավարարում են $a+\frac{1}{b}=b+\frac{3}{a}=\frac{12}{a+b}$ հավասարությանը: Գտնել $(a+b)^2$ արտահայտության արժեքը:

Լուծում: $a+\frac{1}{b}=b+\frac{3}{a}=\frac{12}{a+b}=k \Rightarrow ab+1=kb, ba+3=ka \Rightarrow 2ab+4=ka+kb=12$

$\Rightarrow ab=4 \Rightarrow kb=5, ka=7 \Rightarrow k^2ab=35 \Rightarrow k^2=\frac{35}{4} \Rightarrow (a+b)^2=\frac{576}{35}$

4. Դիցուք $n \times n$ $(n > 1)$ չափի վանդակավոր քառակուսու յուրաքանչյուր վանդակ ներկել են երեք գույներից որևէ մեկով: Գտնել n-ի հնարավոր բոլոր արժեքները, որոնց դեպքում քառակուսին կամայական ձևով ներկելու դեպքում գոյություն ունենա երկու տող, որոնցում որևէ գույնով ներկված վանդակների քանակները լինեն հավասար:

Լուծում: Փորձելով անմիջապես եզրակացնում ենք, որ $n=2$-ը և $n=3$-ը չեն բավարարում Դիցուք $n>3$: Ենթադրենք, որ կամայական ձևով ներկելու դեպքում քառակուսում գոյություն չունի երկու տող, որոնցում որևէ գույնով ներկված վանդակների քանակը հավասար են: Այդ դեպքում առաջին գույնով ներկված վանդակների քանակը փոքր չէ $0+1+2+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$ գումարից: Նմանապես երկրորդ և երրորդ գույների համար, հետևաբար քառակուսու վանդակների քանակը փոքր չէ $\frac{3n(n-1)}{2}$ –ից: Մյուս կողմից, երբ $n \geq 4$ ապա $\frac{3n(n-1)}{2} > n^2$, որը հակասություն է, հետևաբար $n \geq 4$ կամայական բնական թիվ բավարարում է խնդրի պայմաններին: