

Տևողությունը – 180րոպե

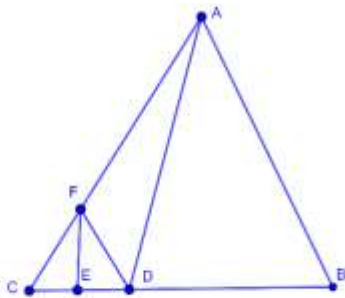
1. 1-ից մինչև 1000 ամեն բնական թվի համար գրատախտակին գրեցին իր բոլոր բաժանարարները (որոշակի թվեր գրատախտակին կգրվեն մեկից ավել անգամ): Այնուհետև հաշվեցին գրատախտակին գրված բոլոր թվերի գումարը: Պարզել թե ստացված թիվը մեկ միլիոնից մե՞ծ է. թե՞ փոքր:

Օրինակ 12-ի բաժանարարներն են 1, 2, 3, 4, 6, 12 թվերը:

Լուծում: Հաշվենք, թե յուրաքանչյուր բնական թիվ քանի՞ անգամ կգրվի գրատախտակին: 1-ը կգրվի 1000 անգամ, քանի որ բոլոր թվերի համար էլ այն բաժանարար է: 2-ը կգրվի 500 անգամ, քանի որ 1-ից 1000 միջակայքում կա 500 հաստ գույգ թիվ: 3-ը կգրվի 333 անգամ, 4-ը 250 և այսպես շարունակ, 999-ը կգրվի մեկ անգամ և 1000-ը կգրվի մեկ անգամ: Նկատենք, որ 1-երի գումարը հավասար է 1000, 2-ների գումարը հավասար է 1000, 3-ների գումարը փոքր է 1000-ից (հավասար է 999) և այսպես մինչև 1000-ը: Ուստի բոլոր գրված թվերի գումարը կլինի փոքր $1000 \times 1000 = 1000000$: Հետևաբար գրատախտակին գրված բոլոր թվերի գումարը փոքր է մեկ միլիոնից:

2. Դիցուք AB, BC, AD հատվածները հավասար են, ընդ որում D կետը BC հատվածի ներքին կետ է : Ապացուցեք, որ DC հատվածի միջնուղղահայացը, ADC անկյան կիսորդը և AC ուղիղը հատվում են մեկ կետում:

Լուծում:



Դիցուք CD հատվածի միջնուղղահայացը AC -ն հատում է F կետում: Ապացուցենք, որ DF -ը ADC անկյան կիսորդն է: Դիցուք $\angle FCD = \angle FDC = \alpha$: Քանի, որ $AB = BC \Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - 2\alpha = \angle ADB \Rightarrow \angle ADC = 2\alpha \Rightarrow \angle FDA = \alpha$:

Տևողությունը – 180րոպե

3. Գրատախտակին գրված $1, 2, 3, 4, \dots, n$ բնական թվերը ներկված են սպիտակ: Յուրաքանչյուր քայլի թույլատրվում է գրատախտակին գրված թվերից ընտրել $a < b < c < d$ չորս թվեր այնպես, որ $b - a = c - b = d - c$ և նրանց գույները փոխել (սպիտակը՝ սև, իսկ սևը՝ սպիտակ): n -ի n° ր արժեքների դեպքում է հնարավոր այնպես անել, որ որոշակի քանակությամբ քայլեր անց գրատախտակին գրված բոլոր թվերը լինեն սև գույնի:

Լուծում: Սկզբում կա 0 քանակությամբ սև թիվ: Առաջին քայլից հետո սև թվերի քանակը կդառնա 4 հատ: Եվս մեկ քայլ անց սև թվերի քանակը կարող է դառնալ 0, 2, 4, 6 կամ 8: Պարզ է, որ ցանկացած քանակությամբ քայլերից հետո սև թվերի քանակը գույգ է: Քանի որ վերջում ցանկանում ենք ունենալ n հատ սև թիվ, ուստի $n = 2k$: Այժմ նկատենք, որ a, b, c, d թվերից կամ բոլորը գույգ են, կամ բոլորը կենտ են, կամ էլ երկու հատը գույգ են և երկու հատը կենտ են: Ամեն դեպքում նրանց մեջ կա գույգ քանակությամբ (0, 2 կամ 4 հատ) գույգ թիվ: Սկզբում կա 0 հատ սև թիվ, իսկ վերջում պետք է լինի k հատ սև թիվ: Քանի որ ամեն քայլի փոխվում է գույգ քանակությամբ գույգ թիվ, ուստի պետք է k -ն նույնպես գույգ լինի: Այսպիսով $n = 2k = 4s$: Այժմ ցույց տանք, որ 4-ի բաժանվող n -երի համար հնարավոր է բոլոր թվերը սարքել սև: Իսկապես, սկզբում սև սարքենք 1, 2, 3, 4 թվերը, հաջորդ քայլին 5, 6, 7, 8, այնուհետև 9, 10, 11, 12 և այսպես շարունակ մինչև $4s - 3, 4s - 2, 4s - 1, 4s$:

Պատասխան, երբ n -ը բաժանվում է 4-ի:

4. Դիցուք a, b թվերը բավարարում են $a + \frac{1}{b} = b + \frac{3}{a} = \frac{12}{a+b}$ հավասարությանը: Գտնել $(a+b)^2$

արտահայտության արժեքը:

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{3}{a} = \frac{12}{a+b} = k \Rightarrow ab + 1 = kb, ba + 3 = ka \Rightarrow 2ab + 4 = ka + kb = 12$$

$$\Rightarrow ab = 4 \Rightarrow kb = 5, ka = 7 \Rightarrow k^2 ab = 35 \Rightarrow k^2 = \frac{35}{4} \Rightarrow (a+b)^2 = \frac{576}{35}$$