ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

11-12-րդ դասարաններ

Երկրորդ օր (16 փետրվարի, 2025թ)

4. Գտնել բոլոր (a, b, c) բնական թվերի եռյակները, որոնց համար

$$(a+b)(b+c)(a+c)(a+b+c+116)$$

թիվը ինչ որ պարզ թվի աստիճան է:

5. Դիցուք ABC եռանկյան AB և AC կողմերի վրա վրցրել են համապատասխանաբար M և N կետերը այնպես, որ M և N կենտրոններով և համապատասխանաբար MB և NC շառավիղներով շրջանագծերը հատում են ABC եռանկյան արտագծած շրջանագիծը և BC հատվածը իրարից տարբեր B_1, C_1 և B_2, C_2 կետերում: Հայտնի է, որ B_1, B_2, C_1, C_2 կետերով անցնում է շրջանագիծ: Ապացուցել, որ $AB = AC$:

6. Դիցուք $0 < x_1 < \cdots < x_{2024} = 1$ իրական թվեր են: Հետևյալ գործողությունը կանվանենք այս թվերի ներկում. ընտրենք 1012 հատը նրանցից և ներկենք կարմիր և նշանակենք $r_1 < r_2 < \cdots < r_{1012}$ և մնացած 1012 թվերը $b_1 < b_2 < \cdots < b_{1012}$ ներկենք կապույտ:

   Օրինակ՝ $r_i = x_i$ և $b_i = x_{i+1012}, \forall i \in [1, 1012]$ կլնի ներկում: Ներկում կլինի նաև $r_i = x_{2i-1}, b_i = x_{2i}, \forall i \in [1, 1012]$:

   Յուրաքնչյուր ներկման համար դիտարկենք հետևյալ մեծությունը

$$S = r_1 b_1 + r_2(b_2 - b_1) + r_3(b_3 - b_2) + \cdots + r_{1012}(b_{1012} - b_{1011})$$

   1. Հնարավո՞ր է արդյոք ընտրել $x_1, x_2, \ldots, x_{2024}$ թվերը, այնպես որ ցանկացած ներկամ համար $S < \frac{1}{2}$
   2. Ապացուցել, որ ցանկացած $x_1, x_2, \ldots, x_{2024}$ թվերի համար հնարավոր է ներկել, այնպես որ $S > \frac{x_{2023}}{2}$

Աշխատաժամանակը 4 ժամ
Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է առավելագույնը 7 միավոր