

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՆԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

11-12-րդ դասարաններ

Երկրորդ օր (18 փետրվարի, 2024թ)

4. Տրված են իրական գործակիցներով $x^4 + a_1x^3 + b_1x^2 - 2x + 1$, $x^4 + a_2x^3 + b_2x^2 - 2x + 1$, $x^4 + a_3x^3 + b_3x^2 - 2x + 1$ բազմանդամները: Նայրնի է, որ $a_1b_2 > a_2b_1$, $a_2b_3 > a_3b_2$ և $a_3b_1 > a_1b_3$: Ապացուցե՛ք, որ փոքրագույն բազմանդամներից գոնե մեկն ունի իրական արմատ:
5. Դիցուք ABC սուրանկյուն եռանկյան AD, BE, CF բարձրությունները հատվում են H կետում: Դիցուք M -ը և S -ը համապատասխանաբար BC և AH հատվածների միջնակետերն են: Դիցուք FE և AH հատվածների հատվում են G կետում, իսկ AM հատվածն ու BCH եռանկյանն արտազած շրջանագիծը հատվում են N կետում: Ապացուցե՛ք, որ $\angle HMA = \angle GNS$:
6. Ամբողջ թվերի a_0, a_1, a_2, \dots հաջորդականությունը կոչվում է «կամարե» հաջորդականություն, եթե $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ և ցանկացած n բնական թվի համար պետի ունի

$$(a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1})(a_{n+1} - 4a_n + 3a_{n-1}) = 0$$

հավասարությունը: Ամբողջ թիվը կոչվում է «կամարե», եթե այն պատկանում է ինչ-որ «կամարե» հաջորդականության: Նայրնի է, որ m և $m+1$ հաջորդական բնական թվերը «կամարե» են (պարզադիր չէ, որ պատկանեն նույն «կամարե» հաջորդականությանը): Ապացուցե՛ք, որ m -ն առանց մնացորդի բաժանվում է 3-ի և $\frac{m}{3}$ թիվը «կամարե» է:

Աշխատաժամանակը 4 ժամ

Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է առավելագույնը 7 միավոր