

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

10-րդ դասարան

Երկրորդ օր (15 փետրվարի, 2026թ)

4. Դիցուք $k > 0$ ամբողջ թիվ է: Տրված են մեկից մեծ $n_1, n_2, \dots, n_k$ իրարից տարբեր k հատ ամբողջ թվերը այնպես, որ

$$n_1! + n_2! + \dots + n_k! = a^{n_1}$$

որտեղ a -ն ինչ-որ ամբողջ թիվ է: Ապացուցել, որ $n_1, n_2, \dots, n_k$ թվերից գոնե մեկը պարզ է:

Նկատառում $x > 0$ ամբողջ թվի համար $x! = x \cdot (x - 1)!$ և $0! = 1$:

5. Երկրում կա 2026 քաղաք, որտեղ որոշ քաղաքների միջև ճանապարհ կա, իսկ որոշների միջև՝ չկա: Հայտնի է, որ ճանապարհները կառուցել են երկու իրարից տարբեր ընկերություններ այնպես, որ յուրքանջուր ճանապարհ կառուցվել է ճիշտ մեկ ընկերության կողմից: Ճանապարհորդություն կանվանենք սկսելով ինչ-որ քաղաքից այցելելով այլ քաղաքներ և վերադառնալ սկզբնական քաղաքը (յուրաքանչյուր քաղաք այցելելով ամենաշատը մեկ անգամ): Հայտնի է, որ ցանկացած ճանապարհորդության համար ճիշտ է հետևյալը. եթե վերցնենք երեք հաջորդական քաղաքներ այդ ճանապարհորդության ընթացքում Ա, Բ և Գ, ապա Ա-ից Բ ճանապարհի և Բ-ից Գ ճանապարհի կառուցողները տարբեր ընկերություններ են: Ինչքա՞ն է կառուցված ճանապարհների հնարավոր առավելագույն քանակը:

6. Տրված են a, b, c դրական իրական թվերը: Ապացուցել, որ

$$\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \right) \left(\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \right) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Աշխատաժամանակը 4 ժամ

Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է առավելագույնը 7 միավոր