

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

10-րդ դասարան

Երկրորդ օր (16 փետրվարի, 2025թ)

4. Ցանկացած n բնական թվի համար ապացուցել հետևյալ անհավասարությունը

$$\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{2}\} + \dots + \{\sqrt{n^2}\} \leq \frac{n^2 - 1}{2}$$

Նկատառում՝ իրական x թվի կոտորակային մասը նշանակում ենք $\{x\}$, որը հավասար է $x - [x]$, որտեղ $[x]$ -ը x -ը չգերազանցող ամենամեծ ամբողջ թիվն է: Օրինակ $\{1.2\} = 1.2 - [1.2] = 1.2 - 1 = 0.2$:

5. Գրատախտակի վրա գրված են $1, 2, \dots, n$ թվերը: Կամոն ու Արեգը խաղում են հետևյալ խաղը. մասնակիցներից յուրաքանչյուրը իր հերթին կարող է կատարել հետևյալ գոծողություններից ճիշտ մեկը

1. Ընտրել գրատախտակին գրված ցանկացած բնական թիվ և այն փոխարինել իրենից մեկով պակաս թվով
2. Ընտրել գրատախտակին գրված ցանկացած երկու բնական թվեր և դրանք փոխարինել մեկ թվով՝ այդ թվերի գումարով

Յուրքանչյուր խաղացողի քայլից հետո քայլն անցնում է մյուս խաղացողին և խաղաը պարտվում է այն խաղացողը ով չի կարողանում քայլ կատարել: Որոշել, թե խաղացողներից ով ունի հաղթելու մարտավարություն, եթե խաղը սկսում է Արեգը:

6. BC տրամագծով և M կենտրոնով ω շրջանագիծը ABC սուրանկյուն եռանկյան AB և AC կողմերը հատում է համապատասխանաբար E և F կետերում: Դիցուք X -ը ω շրջանագծի B կետը չպարունակող EF աղեղի որևէ կետ է, իսկ P -ն AM և EF ուղիղների հատման կետն է: XP ուղիղը երկրորդ անգամ ω -ն հատում է Y կետում: Ապացուցել, որ $\angle XYM = \angle XAY$:

Աշխատաժամանակը 4 ժամ

Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է առավելագույնը 7 միավոր