

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

11-12-րդ դասարաններ

Առաջին օր (15 փետրվարի, 2025թ)

1. Գտնել բոլոր $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են

$$2f(x+y) \geq f(x) + f(y) + x + y,$$

պայմանին ցանկացած $x, y \in \mathbb{R}$ թվերի համար:

2. Դիցուք n -ը բնական թիվ է և S -ը $\{1, 2, \dots, n\}$ թվերի ենթաբազմությունների բազմություն է: Կասենք, որ $j \in [1, n]$ տարրը լավն է, եթե գոյություն ունեն առնվազն n հատ բազմություններ S -ից, որոնք պարունակում են j -ն և գոյություն ունեն առնվազն n հատ բազմություններ S -ից, որոնք չեն պարունակում են j -ն: Գտնել S -ի հնարավոր մեծագույն հզորությունը, այնպես որ գոյություն չունենա լավ տարր:

3. $ABCD$ ($AD \parallel BC$) սեղանը ներգծած է ω շրջանագծին: ABC եռանկյանը ներգծած ω_1 շրջանագիծը BC հատվածը շոշափում է P կետում, իսկ ABD եռանկյանը ներգծած ω_2 շրջանագիծը AD հատվածը՝ Q կետում: Դիցուք X -ը և Y -ը համապատասխանաբար A կետը չպարունակող BC և B կետը չպարունակող AD աղեղների միջնակետերն են: Ապացուցել, որ XP և YQ ուղիղների հատման կետը պատկանում է ω -ին:

Աշխատաժամանակը 4 ժամ

Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է առավելագույնը 7 միավոր